Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$
2. Pour tous $A, h > 0$, on définit :

$$g_A(h) = \sum_{k=0}^{\frac{A}{h}} \frac{1}{1+(kh)^2}$$

   Montrer que $\lim\limits_{h\to 0^+} hg_A(h)$ existe et la calculer en fonction de A.
3. Soit $h > 0$. Montrer que $u_n(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+(kh)^2}$ converge quand n tend vers $+\infty$.

   On note $G(h)$ sa limite.
4. Montrer que $hG(h)$ converge lorsque $h \to 0^+$, et déterminer sa limite.

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, périodique de période $T > 0$.

1. Montrer que l'application I définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$I(a) = \int_a^{a+T} f(t)dt$$

   est constante. On note I cette constante.
2. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \int_a^{x+a} f(t)dt \right) = \frac{I}{T}$$

3. (a) Soit F une primitive de f. A quelle condition F est-elle périodique ?

   (b) Montrer que si f admet une primitive F qui est bornée sur $\mathbb{R}$, alors F est périodique.