

ORAL TYPE ENSAE/ENSAI

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
2. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}$ converge et vaut 2.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt}$$

- (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}}$ est majorée sur \mathbb{R}^{+*} .
- (c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$