Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-\ln(t))dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln(t)}{2+t^2}dt$ converge pour tout x strictement positif.

2. On pose pour tout $x \geqslant 0$:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln(t)}{2+t^2}dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que F est continue en 0.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et donner ses variations.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

   Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

   (a) Etudier les variations de la fonction f_n (on discutera selon la parité de n)

   (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$ (on rappelle que $e < 3$). On note u_n cette solution.

   (c) Montrer que $u_n > 1$.

   (d) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\ln(1+x) = ax + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$, où a et b sont deux constantes que l'on déterminera et ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

3. On pose $\forall n \geqslant 3, v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

4. On pose $\forall n \geqslant 3, w_n = u_n - 1 - \dfrac{1}{n}$. Donner un équivalent de w_n.
   Que vient-on de trouver pour la suite (u_n) ?