

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On définit la fonction Tangente Hyperbolique th pour tout réel x par :

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de $\text{th}(x)$ quand x tend vers 0.
2. Etudier en fonction du réel x , la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2^n} \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

3. Donner la somme $S(x)$ de la série quand elle est existe.
(Indication : on pourra montrer que pour $x \neq 0$,

$$\frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)} = \text{th}(x)$$

4. Etudier la continuité de $x \mapsto S(x)$.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 t^{tx} dt$$

1. Que vaut $F(0)$?
2. Rappeler pour $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, l'écriture de t^a à l'aide des fonctions \exp et \ln .
3. On considère, pour x fixé, la fonction $\varphi_x : t \in]0, 1] \mapsto t^{tx}$.
Etudier φ_x : montrer qu'elle est définie et continue, dresser son tableau de variations, la prolonger par continuité en 0.
4. Montrer que F est définie et croissante sur \mathbb{R} .
5. Calculer la limite de F en $+\infty$ après avoir encadré F .