

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Le but est de déterminer la limite de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \ln(x) dx$ existe et calculer sa valeur.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln\left(\frac{p}{n}\right) = -1$.
(Indication : On pourra essayer d'encadrer la somme par une intégrale)
3. Conclure.

Exercice 2

Soit G la fonction définie par

$$G(x) = \int_{1/x}^x \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} dt$$

1. Montrer que $G(2)$ existe.
2. Donner l'ensemble de définition de G .
3. Montrer que G est continue sur son ensemble de définition.

Indication : on pourra par exemple écrire pour $x > 1$:

$$G(x) = \int_{1/x}^{1/2} \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} dt + G(2) + \int_2^x \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} dt$$

4. Montrer que G est dérivable sauf peut-être en un point de son ensemble de définition. Donner sa dérivée.
5. Quelles sont les variations de G ? Donner les limites (si elles existent) en $\pm\infty$ et en 0^\pm
6. Effectuer une étude asymptotique de G .