

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

---

## Exercice 1

Pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$ , on note :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$$

1. Calculer  $B(p, 0)$  pour tout entier naturel  $p$ .
  2. Montrer que pour tous  $p$  et  $q$ ,  $B(p, q) = B(q, p)$
  3. Exprimer  $B(p, q)$  en fonction de  $B(p+1, q-1)$ .
  4. Calculer  $B(p, q)$  en fonction de  $p$  et  $q$ .
- 

## Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction  $F$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$$

1. Que vaut  $F(0)$  ?
2. On considère, pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction

$$\varphi_x : t \in ]0, 1] \longrightarrow t^{t^x}$$

Etudier  $\varphi_x$  : montrer qu'elle est définie et continue, dresser son tableau de variations et la prolonger par continuité en 0.

3. Montrer que  $F$  est définie et croissante sur  $\mathbb{R}$
4. Encadrer  $F$  et en déduire sa limite en  $+\infty$ .