

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \int_0^1 (x^3 + t^3)^{-1/3} dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
(On pourra effectuer un changement de variable en posant $t = ux$)
3. En quels points f est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t \sin(t)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = (-1)^{n-1} |u_n|$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$,

$$\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \leq |u_n| \leq \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2}$$

Indication : on pourra commencer par montrer que $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ est décroissante sur un intervalle que l'on précisera.

3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{1+t^2} dt$ converge.