Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Etudier le sens de variations de f sur D_f.
3. Déterminer les limties de f aux bornes de D_f.
4. Calculer $f(0)$. On admettra que f est continue en 0.
5. Etablir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
6. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers la borne supérieure de D.

Exercice 2

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-\ln(t))dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln(t)}{2+t^2}dt$ converge pour tout x strictement positif.
2. On pose pour tout $x \geqslant 0$:
$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln(t)}{2+t^2}dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que F est continue en 0.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et donner ses variations.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$
   Montrer que la suite (u_n) est convergente.