Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$g(t,x) = \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} \qquad \text{et} \qquad u_n(x) = g(n,x)$$

1. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ selon les valeurs du réel x.
   Pour les x réels pour lesquels cette série converge, on notera
   $$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$
2. On pose maintenant pour $x > 0$:
   $$I_1(x) = \int_1^{+\infty} g(t,x)dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} g(t,x)dt$$
   Montrer que ces deux intégrales sont convergentes, puis calculer leur valeur.

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \int_0^y \exp(t^2)dt$$

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel, noté $f(x)$ vérifiant l'égalité
   $$\int_x^{f(x)} \exp(t^2)dt = 1.$$
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f, et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer la limite puis un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - x$.