Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$g(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calculer $g^{(n)}(x)$ en utilisant P_n.
2. Montrer que, pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se :

$$e^x P_n(-x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^x e^t t^n dt = 1$$

3. Déduidre de la question précédente le nombre de racines réelles de P_n, puis de l'équation $g^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 2

On veut considérer la fonction f telle que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \; f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement en 0.
4. Etudier la branche infinie de f et tracer l'allure de la courbe représentative de f.