Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

1. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1}$ et la calculer à l'aide du changement de variable affine $u = 2t-1$.
2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.
   (a) Déterminer la limite de $I(n,n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,
   $$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1)$$
   (c) En déduire que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,
   $$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$
3. (a) Pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

On veut poser
$$I : x \in [0,+\infty[\longrightarrow \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Déterminer a tel que $f : t \mapsto |\sin(t)| - a$ admette une primitive F telle que $F(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Justifier que F est π-périodique.
3. En déduire l'équivalent suivante :
   $$\int_\pi^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} a\ln(x)$$
4. Montrer qu'il existe un réel b tel que, lorsque $x \to +\infty$,
   $$I(x) - a\ln(x) - b = O\left(\frac{1}{x}\right)$$