

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

- (a) Montrer que $\int_0^1 (1 - \ln(t))dt$ converge et donner sa valeur.
 (b) Montrer que $\int_0^x \frac{1 - \ln(t)}{2 + t^2} dt$ converge pour tout x strictement positif.
- On pose pour tout $x \geq 0$:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1 - \ln(t)}{2 + t^2} dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que F est continue en 0.
 - Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, et donner ses variations.
- Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

Soit G la fonction définie par

$$G(x) = \int_{1/x}^x \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} dt$$

- Montrer que $G(2)$ existe.
- Donner l'ensemble de définition de G .
- Montrer que G est continue sur son ensemble de définition.
Indication : on pourra par exemple, écrire pour $x > 1$,

$$G(x) = \int_{1/x}^{1/2} \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} dt + G(2) + \int_2^x \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} dt$$

- Montrer que G est dérivable sauf peut-être en un point de son ensemble de définition et donner sa dérivée.
- G est-elle croissante ou décroissante ? Donner les limites si elles existent en $-\infty, 0^-, 0^+, +\infty$.
- Faire l'étude asymptotique de G .