Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$g(t,x) = \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} \qquad \text{et} \qquad u_n(x) = g(n,x)$$

1. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ selon les valeurs du réel x.
   Pour les x réels pour lesquels cette série converge, on notera
   $$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$
2. On pose maintenant pour $x > 0$:
   $$I_1(x) = \int_1^{+\infty} g(t,x)dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} g(t,x)dt$$
   Montrer que ces deux intégrales sont convergentes, puis calculer leur valeur.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = (-1)^{n-1}|u_n|$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$,
   $$\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \leqslant |u_n| \leqslant \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2}$$
   Indication : on pourra commencer par montrer que $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ est décroissante sur un intervalle que l'on précisera.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}$ converge.