

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Une station de comptage dénombre les véhicules qui circulent sur une route. Pour tout entier naturel n , on note X_n le nombre de véhicules passés entre les instants 0 et n (on suppose que $X_0 = 0$).

On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous $m \leq n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), $X_n - X_m$ suit une loi de Poisson de paramètre $(n - m)\lambda$ et X_m est indépendante de $X_n - X_m$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$.

1. Calculer $\text{cov}(X_m, X_n)$. Déterminer la loi du couple (X_m, X_n) .
2. Supposons $n > 0$. Déterminer $\mathbb{P}(X_m = j \mid X_n = k)$ pour tous j et k .
3. On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit entier k tel qu'il soit passé au moins un véhicule entre les instants 0 et k . Déterminer la loi de N .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = (-1)^{X_n}$. Calculer l'espérance et la variance de Y_n . Déterminer leurs limites quand n tend vers l'infini. Calculer $\text{cov}(Y_m, Y_n)$.
(On pourra remarquer que $(-1)^{X_n + X_m} = (-1)^{X_n - X_m}$)

Exercice 2

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} + 2\text{Arctan}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité $f^- :]-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ en -1 à gauche ; et un prolongement par continuité $f^+ : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en -1 à droite.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq -1$.
4. Etudier la dérivabilité en -1 de f^- et f^+ .
5. Donner le tableau de variations de f sur son domaine de définition et tracer l'allure de la courbe représentative de f .