

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_2(\{0, 1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $\forall i, j \in \{1, 2\}, M_{i,j} \in \{0, 1\}$.

1. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_2(\{0, 1\})$? Parmi celles-ci, combien sont-elles inversibles ?
2. Soient $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$. On définit

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0, 1\}) \quad \text{et} \quad R = \text{rg}(B)$$

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire R . Calculer son espérance, sa variance.
4. Même question avec $p \in [0, 1]$ quelconque.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité que B est inversible est-elle maximale ?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de p l'espérance de R est-elle maximale ?

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \int_0^y \exp(t^2) dt$$

1. Montrer que g réalise une bijection de \mathbb{R} vers un ensemble à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel, noté $f(x)$ vérifiant l'égalité

$$\int_x^{f(x)} \exp(t^2) dt = 1.$$

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f , et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer la limite puis un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - x$.