Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce qui donne "Pile" avec une probabilité $p \in]0,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On effectue N lancers du dé, puis, si n est le nombre de "6" obtenus, alors on lance n fois la pièce.
On appelle Z le nombre de "6" obtenus lors des N lancers du dé, et X (resp. Y) le nombre de "Pile" (resp. "Face") obtenus lors des lancers de la pièce.
On remarquera que $X + Y = Z$.

1. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = k \mid Z = n)$ pour tous n et k entiers. En déduire la loi de X.
3. Déterminer la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone, de $[0,1]$ dans lui-même, telle que

$$\forall x \in [0,1],\ 2x - f(x) \in [0,1]$$

1. Déterminer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire le sens de variation de f.
2. On suppose dorénavant que f vérifie :

$$\forall x \in [0,1], f(2x - f(x)) = x$$

   Montrer que l'identité vérifie toutes les hypothèses de l'énoncé.
3. Réciproquement, on veut montrer que f est nécessairement l'identité.
   (a) Montrer que f est bijective sur $[0,1]$.
   (b) Soit la suite définie par $x_0 \in [0,1]$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
   $$x_n = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{2}$$
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n = x_0 + n(x_1 - x_0)$.
   (d) Conclure