Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce qui donne Pile avec une probabilité $p \in @0, 1[$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On effectue N lancers du dé, puis, si n est le nombre de 6 obtenus, alors on lance n fois la pièce.
On appelle Z le nombre de 6 obtenus lors des N lancers du dé, et X (resp. Y) le nombre de Pile (resp. Face) obtenus lors des lancers de la pièce.
On remarquera que $X + Y = Z$.

1. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$ pour tout $n \in Z(\Omega)$. En déduire la loi de X.
3. Déterminer la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Exercice 2

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Etudier le sens de variations de f sur D_f.
3. Déterminer les limties de f aux bornes de D_f.
4. Calculer $f(0)$. On admettra que f est continue en 0.
5. Etablir une relation entre $f(x)$ et $f(x + 1)$.
6. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers la borne supérieure de D.