Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère deux pièces truquées A et B.
La pièce A donne Pile avec le probabilité a $(0 < a < 1)$, et la pièce B donne Pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois $(k \geqslant 2)$.

1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au j-ième lancer.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au k-ième lancer.
3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini.
   Interpréter le résultat obtenu lorsque $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Exercice 2

Sous réserve d'existence, on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

1. Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Déterminer les limites de F en 0^+ et $+\infty$.
4. Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$
5. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.