Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \int_0^y \exp(t^2)dt$$

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel, noté $f(x)$ vérifiant l'égalité
$$\int_x^{f(x)} \exp(t^2)dt = 1.$$
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f, et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer la limite puis un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - x$.

Exercice 2

On dispose $n \geqslant 2$ boules dans une urne, numérotées $1, 2, \ldots, n$.
Un premier joueur effectue des tirages sans remise (et au hasard chaque fois parmi les boules restantes) jusqu'au premier tour X_1 où il tire la boule n.

1. Montrer que X_1 suit une loi uniforme. Préciser son espérance.

Un second joueur entre alors en scène, et deux situations vont être considérées.

2. Dans le premier cas, ce joueur effectue X_2 tirages jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les boules restantes (on pose $X_2 = 0$ lorsqu'il ne reste plus de boules dans l'urne).
   (a) Déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $X_1 = k$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (i.e. déterminer pour tout ℓ, $\mathbb{P}(X_2 = \ell | X_1 = k)$).
   (b) X_2 est-elle indépendante de X_1 ?
   (c) Calculer l'espérance de X_2.
3. Dans le second cas, et toujours s'il reste au moins une boule dans l'urne, le second joueur tire simplement une boule au hasard, dont on note X_3 le numéro.
   (a) Comment définir X_3 lorsqu'il n'y a plus de boules dans l'urne, de sorte que X_3 soit indépendante de X_1 ? On pourra commencer par déterminer la loi conditionnelle de X_3 par rapport à tous les événements $X_1 = k$, $k \leqslant n - 1$.
   (b) Quelles sont alors la loi et l'espérance de X_3 ?