Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.
Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ (avec $n \geqslant 2$).
Posons $\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ a_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$.
Supposons que $a_{i,j} = \dfrac{1}{2n}$ si $|i + j - (n+2)| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ définit bien une loi de probabilité de couple.
2. Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$. Montrer que pour $n = 2$, A est diagonalisable.
   On admet le résultat pour n quelconque.
3. Déterminer les lois de X et Y.
4. On pose $b_{i,j} = \mathbb{P}(X = i \,|\, Y = j)$. Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$.
   Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X=1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X=n+1) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B.

Exercice 2

Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation.
Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros, x et y étant des réels strictement positifs. Ce commerccant désire déterminer la taille n optimale de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.
On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X. On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison.
On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leqslant n$ et qui vaut 0 si $X > n$.
On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. En distinguant deux cas selon la valeur de U, montrer que : $Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U)$.
2. (a) Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   (b) Exprimer, sous forme de somme, l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.
   (c) Montrer enfin que $\mathbb{E}[Y_n] = (x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-n)\mathbb{P}(X = k) + nx$.
3. On suppose que $\mathbb{P}(X = 0) < \dfrac{x}{x+y}$.
   (a) Exprimer $\mathbb{E}[Y_{n+1}] - \mathbb{E}[Y_n]$ en fonction de x, y et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :
   $$\sum_{k=0}^{n_0}\mathbb{P}(X = k) < \frac{x}{x+y} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n_0+1}\mathbb{P}(X = k) \geqslant \frac{x}{x+y}.$$
   (c) En déduire que le commerçant maximise son espérance de gain, avec un stock de taille $n_0 + 1$.