Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires géométriques de paramètre p indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = X - Y$.

1. Quelle est la loi de M ?
2. Montrer que M et D sont indépendantes.
3. Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, telles que pour tout entier k strictement positif, on ait $\mathbb{P}(X = k) > 0$. Montrer que si la variable aléatoire $\min(X, Y)$ est indépendante de la variable aléatoire $X - Y$, alors X suit une loi géométrique.

   Indication : on pourra considérer le rapport $\dfrac{\mathbb{P}(\{X = k+1\} \cap \{Y = k\})}{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\})}$.

Exercice 2

On considère deux urnes, celle de gauche contient au début du jeu (tour $t = 0$) deux boules blanches et celle de droite, deux boules noires. On répète le protocole suivant : à chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, on part de la configuration du tour $t - 1$, on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on les échange. On note X_t le nombre de boules blanches dans l'urne de gauche.

1. Déterminer X_0 et X_1. Quelles sont les valeurs possibles pour X_t lorsque $t \geqslant 2$?
2. Déterminer, pour $i = 0, 1, 2$, et $k \geqslant 0$ tels que $\mathbb{P}(X_k = i) > 0$, la valeur de $\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i)$ pour $j = 0, 1, 2$.
3. Pour $k \geqslant 0$, on note z_k le vecteur

$$z_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

   Exhiber une matrice M telle que $z_{k+1} = M z_k$ pour tout $k \geqslant 0$.
4. Calculer les valeurs propres de M.
5. En déduire que toutes les composantes de z_k convergent lorsque $k \to +\infty$. Déterminer le vecteur limite ainsi obtenu en prouvant au préalable que ses composantes sont de somme 1.