Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. On note, pour tout $n \in [\![2, N]\!]$, p_n la probabilité de voir pour la première fois la suite $0, 1$ (dans cet ordre) aux rangs $n-1$ et n dans la suite $X_1, X_2, \dots, X_N$. (On dira alors que la position de la suite est n).
   (a) Calculer p_2, p_3 et p_4.
   (b) Déterminer la formule générale de p_n et montrer en particulier que cette probabilité ne dépend pas de N.
2. Soit s un réel de $[0, 1]$. Calculer
$$G_N(s) = \sum_{n=2}^{N} p_n s^n,$$
et écrire $G_N(s)$ sous la forme $h(s) + R_N(s)$ avec $R_N(s)$ tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
3. Si la suite $0, 1$ n'est pas vue entre 2 et N, on dira que sa position est 0. On note la probabilité de cet événement $p_0(N)$.
Interpréter $G_N(1)$ en fonction de $p_0(N)$. Donner la limite de $p_0(N)$ lorsque $N \to +\infty$.
4. Montrer que la position moyenne du premier instant entre 2 et N où l'on voit la suite $0, 1$ est donnée par la dérivée de G_N en 1.
5. Expliquer pourquoi $R'_N(1)$, la dérivée de R_N en 1 tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. En déduire la limite de la position moyenne du premier instant où l'on voit $0, 1$ lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_2(\{0, 1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $\forall i, j \in \{1, 2\},\ M_{i,j} \in \{0, 1\}$.

1. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_2(\{0, 1\})$? Parmi celles-ci, combien sont-elles inversibles ?
2. Soient $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$. On définit
$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0, 1\}) \quad \text{et} \quad R = \text{rg}(B)$$
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire R. Calculer son espérance, sa variance.
4. Même question avec $p \in [0, 1]$ quelconque.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité que B est inversible est-elle maximale ?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de p l'espérance de R est-elle maximale ?