Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit UVW un triangle équilatéral de côté de longueur 1. Une puce part du point U à l'instant $n = 0$ et se déplace sur les sommets du triangle. Si à l'instant n elle se trouve sur un sommet, elle se trouvera à l'instant $n+1$ sur l'un des deux autres sommets avec équiprobabilité.
On appelle u_n (resp. v_n, w_n) la probabilité que la puce se trouve au sommet U (resp. V, W) à l'instant n.
Enfin, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A, indépendante de n, telle que pour tout entier naturel n, on ait $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
3. Calculer A^n pour $n \geqslant 1$ et en déduire les valeurs de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
4. Soit L la longueur parcourue par la puce à l'instant où, pour la première fois, les trois sommets du triangle ont été visités. Déterminer la loi de L et calculer son espérance.

Exercice 2

On dispose de $n \geqslant 2$ boules dans une urne, numérotées de 1 à n.
Un premier joueur effectue des tirages sans remise (et au hasard chaque fois parmi les boules restantes) jusqu'au premier tour X_1 où il tire la boule numéro n.

1. Montrer que X_1 suit une loi uniforme. Préciser son espérance.

   Un second joueur entre alors en scène et deux situations vont être considérées.

2. Dans le premier cas, ce joueur effectue X_2 tirages jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les boules restantes (on pose $X_2 = 0$ lorsqu'il ne reste plus de boules dans l'urne).
   (a) Déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $X_1 = k$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (b) X_2 et X_1 sont-elles indépendantes ?
   (c) Calculer l'espérance de X_2.
3. Dans le second cas, et toujours s'il reste au moins une boule dans l'urne, le second joueur tire simplement une boule au hasard, dont on note X_3 le numéro.
   (a) Comment définir X_3 lorsqu'il n'y a plus de boules dans l'urne, de sorte que X_3 soit indépendante de X_1 ?
   On pourra commencer par déterminer la loi conditionnelle de X_3 par rapport à tous les événements $X = k$, $k \leqslant n-1$.
   (b) Quelles sont alors la loi et l'espérance de X_3 ?