Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si $\forall n \geqslant 0,\ \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{\lambda}{n+1}$.
2. Quelle est la valeur la plus probable d'une variable distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 2

Soit N un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On note $q = 1 - p$.
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (1 - q^n)^N$.

1. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire la convergence de la série de terme général u_n.

   On note alors $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   On considère N urnes $U_1, \ldots, U_N$ identiques. Chacune contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion q.
   On effectue des tirages avec remise dans ces urnes. On procède de la manière suivante :
   - au premier tirage, on tire une boule de chaque urne,
   - au deuxième tirage, on tire une boule de chaque urne où une boule noire a été tirée au tirage précédent,
   - et ainsi de suite …

   On note X_k le nombre d'épreuves nécessaires pour tirer une boule blanche de l'urne U_k.
   On note Y le nombre d'épreuves nécessaires pour tirer une boule blanche dans chacune des N urnes.
3. Exprimer Y en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
4. (a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Déterminer la loi de Y.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y > k) - n\mathbb{P}(Y > n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k)$
6. En déduire l'existence de $\mathbb{E}[Y]$ et son expression en fonction de M.