Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, avec $0 < p < 1$.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise.

1. On note NV (respectivement NB) la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).
   Déterminer les lois de NV et NB. Les variables NV et NB sont-elles indépendantes ?
2. Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ défini par :
   Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j)$ est l'événement : "les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)$-ième est blanche" ou "les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)$-ième est verte".
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer que X admet une espérance. Pour quelle valeur de p cette espérance est-elle minimale ?
   (c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
   (d) En déduire la loi de Y et montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.
   (e) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

On dispose d'une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées $1, 2, \ldots, n$. On effectue des tirages successifs au hasard et avec remise, notés $X_1, X_2, \ldots$; et on s'intéresse à la loi du premier temps T où chacune des boules aura été tirée au moins une fois. On note par ailleurs S_k, pour tout entier $k \geqslant 1$, le nombre de boules différentes vues entre le premier et le k-ième tirage compris.

1. Quelle est la probabilité que $X_1 = X_2$?
2. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = n)$ et en déduire $\mathbb{P}(T = \ell)$ pour tout entier $\ell \leqslant n$.
3. Dans le cas $n = 2$, déterminer la loi de T.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'espérance de T vaut :

$$\mathbb{E}[T] = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{2} + n$$