Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Trois amis lancent tour à tour un dé à n faces : André commence, puis c'est à Bertrand, puis à Christian, et à nouveau à André, etc... Dès que l'un d'entre eux obtient un 1, il a gagné.

1. Combien de dés seront lancés en moyenne avant que l'un d'entre eux ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité pour chacun d'entre eux de gagner ?
3. Combien de faces doit posséder le dé pour qu'André ait plus de chances de gagner que Bertrand et Christian réunis ?

Exercice 2

Audrey lance un dé (non pipé) autant de fois que nécessaire pour obtenir successivement un 1, puis un 6. On note $X_1, X_2, \dots$ les variables aléatoires modélisant les résultats des lancers d'Audrey.

1. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2).
2. On définit la suite de variables aléatoires $Y_0, Y_1, \dots$ de la façon suivante : pour tout entier t positif ou nul,

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 2, X_{t-1} = 1 \text{ et si } X_t = 6 \\ 2 & \text{si } t \geqslant 1,\ X_t = 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ \mathbb{P}\left(Y_{t+1} = j \,|\, Y_t = i\right) = M_{i,j}$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

3. On note x le nombre moyen de lancers nécessaires à Audrey pour obtenir lors de deux lancers successifs sa combinaison $(1, 6)$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que le couple (x, y) satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} x = 1 + 5x/6 + y/6 \\ y = 1 + 2x/3 + y/6 \end{cases}$$

   En déduire la valeur de x.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Une épreuve écrite de concours se présente sous forme d'un QCM. 50 questions, supposées mutuellement indépendantes, y sont posées. Pour chacune des 50 questions, il y a quatre sous-questions supposées mutuellement indépendantes.
Pour chaque sous-question, le candidat a le choix entre deux réponses : "Vrai" ou "Faux". Les réponses aux questions sont présentées en ligne, une ligne par question, chaque ligne étant constituée de quatre cases à cocher, une par sous-question.
On suppose que le candidat donne une réponse à chaque sous-question et qu'il répond à chaque fois au hasard.
On note F la variable aléatoire décomptant le nombre de sous-questions dont la réponse est erronée.

1. Dans une première éventualité, on suppose que le QCM est corrigé "question par question", c'est-à-dire qu'une ligne est considérée comme juste et rapporte 4 points au candidat si et seulement si toutes les réponses de la ligne sont correctes. Dans le cas contraire, le candidat est pénalisé d'un point.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le candidat.
   Déterminer la loi de X, son espérance, et sa variance.
2. Désormais, on suppose qu les sous-questions sont corrigées indépendamment les unes des autres, chaque case ayant une réponse correcte rapportant 1 point au candidat, et chaque case ayant une réponse incorrecte pénalisant la note de 1/4 de point.
   On note Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus dans cette deuxième correction.
   Déterminer la loi de Y, son espérance, et sa variance.

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_2(\{0,1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $\forall i, j \in \{1,2\},\ M_{i,j} \in \{0,1\}$.

1. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$? Parmi celles-ci, combien sont-elles inversibles ?
2. Soient $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$. On définit

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0,1\}) \quad \text{et} \quad R = \mathrm{rg}(B)$$

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire R. Calculer son espérance, sa variance.
4. Même question avec $p \in [0,1]$ quelconque.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité que B est inversible est-elle maximale ?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de p l'espérance de R est-elle maximale ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère une usine produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2.

1. Quelle est la probabilité qu'un objet défectueux provienne de la chaîne A ?
2. On suppose que le nombre d'objets produits par A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. X est la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par A en une heure.
   Rappeler la loi de Y, son espérance et sa variance.
   Déterminer $\mathbb{P}(X = k \mid Y = n)$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de X.

Exercice 2

On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. On note, pour tout $n \in [\![2, N]\!]$, p_n la probabilité de voir pour la première fois la suite $0, 1$ (dans cet ordre) aux rangs $n-1$ et n dans la suite $X_1, X_2, \dots, X_N$. (On dira alors que la position de la suite est n).
   (a) Calculer p_2, p_3 et p_4.
   (b) Déterminer la formule générale de p_n et montrer en particulier que cette probabilité ne dépend pas de N.
2. Soit s un réel de $[0, 1]$. Calculer
$$G_N(s) = \sum_{n=2}^{N} p_n s^n,$$
   et écrire $G_N(s)$ sous la forme $h(s) + R_N(s)$ avec $R_N(s)$ tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
3. Si la suite $0, 1$ n'est pas vue entre 2 et N, on dira que sa position est 0. On note la probabilité de cet événement $p_0(N)$.
   Interpréter $G_N(1)$ en fonction de $p_0(N)$. Donner la limite de $p_0(N)$ lorsque $N \to +\infty$.
4. Montrer que la position moyenne du premier instant entre 2 et N où l'on voit la suite $0, 1$ est donnée par la dérivée de G_N en 1.
5. Expliquer pourquoi $R'_N(1)$, la dérivée de R_N en 1 tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. En déduire la limite de la position moyenne du premier instant où l'on voit $0, 1$ lorsque $N \to +\infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0.25.

1. Un client appelle le service à n reprises. X est la variable aléatoire comptant le nombre de fois que le client a dû subir un retard. Déterminer la loi de X, son espérance, et sa variance. Calculer la probabilité que le client subisse au moins uun retard.
2. Le nombre d'appels reçus chaque jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. Notons Z le nombrre d'appels traités en retard. Calculer $\mathbb{P}(Z = k|Y = n)$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ et déterminer la loi de Z.
3. En 2011, le standard a reçu une succession d'appels indépendants. On note U le premier appel reçu, traité en retard. Donner la loi de U ainsi que son espérance.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires géométriques de paramètre p indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = X - Y$.

1. Quelle est la loi de M ?
2. Montrer que M et D sont indépendantes.
3. Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, telles que pour tout entier k strictement positif, on ait $\mathbb{P}(X = k) > 0$. Montrer que si la variable aléatoire $\min(X, Y)$ est indépendante de la variable aléatoire $X - Y$, alors X suit une loi géométrique.
   Indication : on pourra considérer le rapport
   $$\frac{\mathbb{P}(\{X = k+1\} \cap \{Y = k\})}{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\})}$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On observe des virus qui se reproduisent selon une loi géométrique avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $0 < p < 1$, puis meurt :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$$

1. Calculer pour tout $r \in [0,1]$, la valeur $f(r) = \mathbb{E}\left[r^X\right]$.
2. On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc X_1 virus, où X_1 suit la loi géométrique de paramètre p ; chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon cette même loi géométrique avant de mourir : cela conduit à avoir X_2 virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Montrer que (u_n) est convergente.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (d) Déterminer alors la limite de (u_n) en fonction de p. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ (avec $n \geqslant 2$). Posons

$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!], \ a_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$$

Supposons que $a_{i,j} = \dfrac{1}{2n}$ si $|i + j - (n+2)| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ définit bien une loi de probabilité de couple.
2. Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$. Montrer que pour $n = 2$, A est diagonalisable. *On admet le résultat pour n quelconque.*
3. Déterminer les lois de X et Y.
4. On pose $b_{i,j} = \mathbb{P}(X = i \,|\, Y = j)$. Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$.
   Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X=1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X=n+1) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère N variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. On note, pour tout $n \in [\![2, N]\!]$, p_n la probabilité de voir pour la première fois la suite $0, 1$ (dans cet ordre) aux rangs $n-1$ et n dans la suite $X_1, X_2, \ldots, X_N$. (On dira alors que la position de la suite est n).
   (a) Calculer p_2, p_3 et p_4.
   (b) Déterminer la formule générale de p_n et montrer en particulier que cette probabilité ne dépend pas de N.
2. Soit s un réel de $[0, 1]$. Calculer
$$G_N(s) = \sum_{n=2}^{N} p_n s^n,$$
et écrire $G_N(s)$ sous la forme $h(s) + R_N(s)$ avec $R_N(s)$ tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
3. Si la suite $0, 1$ n'est pas vue entre 2 et N, on dira que sa position est 0. On note la probabilité de cet événement $p_0(N)$.
   Interpréter $G_N(1)$ en fonction de $p_0(N)$. Donner la limite de $p_0(N)$ lorsque $N \to +\infty$.
4. Montrer que la position moyenne du premier instant entre 2 et N où l'on voit la suite $0, 1$ est donnée par la dérivée de G_N en 1.
5. Expliquer pourquoi $R'_N(1)$, la dérivée de R_N en 1 tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. En déduire la limite de la position moyenne du premier instant où l'on voit $0, 1$ lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
Le but est d'étudier la convergence de la série de terme général u_n.

1. Enoncer une première série de résultats dépendant de a.
2. On suppose dès maintenant que $a = 1$.
   (a) On suppose $b > 1$. Soit $\beta \in]1, b[$. En comparant u_n et $\frac{1}{n^\beta}$, montrer que $\sum u_n$ converge.
   (b) On suppose $b < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (c) Que peut-on dire quand $b = 1$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.
Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires géométriques de paramètre p indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = X - Y$.

1. Quelle est la loi de M ?
2. Montrer que M et D sont indépendantes.
3. Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, telles que pour tout entier k strictement positif, on ait $\mathbb{P}(X = k) > 0$. Montrer que si la variable aléatoire $\min(X, Y)$ est indépendante de la variable aléatoire $X - Y$, alors X suit une loi géométrique.
   Indication : on pourra considérer le rapport $\dfrac{\mathbb{P}(\{X = k+1\} \cap \{Y = k\})}{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\})}$.

Exercice 2

Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation.
Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros, x et y étant des réels strictement positifs. Ce commerccant désire déterminer la taille n optimale de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.
On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X. On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison.
On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leqslant n$ et qui vaut 0 si $X > n$.
On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. En distinguant deux cas selon la valeur de U, montrer que : $Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U)$.
2. (a) Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   (b) Exprimer, sous forme de somme, l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.
   (c) Montrer enfin que $\mathbb{E}[Y_n] = (x + y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - n)\mathbb{P}(X = k) + nx$.
3. On suppose que $\mathbb{P}(X = 0) < \dfrac{x}{x + y}$.
   (a) Exprimer $\mathbb{E}[Y_n + 1] - \mathbb{E}[Y_n]$ en fonction de x, y et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :
   $$\sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{P}(X = k) < \frac{x}{x + y} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n_0+1} \mathbb{P}(X = k) \geqslant \frac{x}{x + y}$$
   (c) En déduire que le commerçant maximise son espérance de gain, avec un stock de taille $n_0 + 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, avec $0 < p < 1$.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise.

1. On note NV (respectivement NB) la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).
   Déterminer les lois de NV et NB. Les variables NV et NB sont-elles indépendantes ?
2. Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ défini par :
   Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j)$ est l'événement : "les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)$-ième est blanche" ou "les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)$-ième est verte".
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer que X admet une espérance. Pour quelle valeur de p cette espérance est-elle minimale ?
   (c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
   (d) En déduire la loi de Y et montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.
   (e) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

On dispose d'une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées $1, 2, \ldots, n$. On effectue des tirages successifs au hasard et avec remise, notés $X_1, X_2, \ldots$; et on s'intéresse à la loi du premier temps T où chacune des boules aura été tirée au moins une fois. On note par ailleurs S_k, pour tout entier $k \geqslant 1$, le nombre de boules différentes vues entre le premier et le k-ième tirage compris.

1. Quelle est la probabilité que $X_1 = X_2$?
2. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = n)$ et en déduire $\mathbb{P}(T = \ell)$ pour tout entier $\ell \leqslant n$.
3. Dans le cas $n = 2$, déterminer la loi de T.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'espérance de T vaut :

$$\mathbb{E}[T] = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{2} + n$$