Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Trois amis lancent tour à tour un dé à n faces : André commence, puis c'est à Bertrand, puis à Christian, et à nouveau à André, etc... Dès que l'un d'entre eux obtient un 1, il a gagné.

1. Combien de dés seront lancés en moyenne avant que l'un d'entre eux ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité pour chacun d'entre eux de gagner ?
3. Combien de faces doit posséder le dé pour qu'André ait plus de chances de gagner que Bertrand et Christian réunis ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $N = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} 1$.
   Calculer N.
2. On effectue une succession de tirages d'une boule (avec remise à chaque fois de la boule obtenue avant le tirage suivant) dans une urne comprenant au départ n boules numérotées de 1 à n.
   Pour tout $k \geqslant 1$, on note B_k le numéro de la k-ième boule tirée.
   On arrête d'extraire les boules de l'urne dès que $B_{k+1} \geqslant B_k$.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.
   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
   (b) Quelle est la signification de l'événement $[X > k]$? En déduire la loi de X.
   (c) Calculer l'espérance de X.
   (d) Déterminer le nombre moyen de boules tirées, lorsque n est "très grand".

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables. L'une contient 5 allumettes, l'autre en contient 2. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 2

Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce équilibrée et progresse d'une marche s'il obtient Pile et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient Face.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
   (a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche et $\mathbb{E}[Y_n]$ l'espérance de Y_n.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
   (b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel k et tout entier $n \geqslant 3$, on a ;
   $$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$$
   (d) Montrer que pour $n \geqslant 3$,
   $$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_{n-1}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_{n-2}] + 1$$
   (e) On pose $\mathbb{E}[Y_n] = v_n + \frac{2}{3}n$. Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (v_n). En déduire la valeur de l'espérance de Y_n.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce équilibrée et progresse d'une marche s'il obtient Pile et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient Face.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
   (a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche et $\mathbb{E}[Y_n]$ l'espérance de Y_n.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
   (b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel k et tout entier $n \geqslant 3$, on a ;
   $$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$$
   (d) Montrer que pour $n \geqslant 3$,
   $$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_{n-1}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_{n-2}] + 1$$
   (e) On pose $\mathbb{E}[Y_n] = v_n + \frac{2}{3}n$. Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (v_n). En déduire la valeur de l'espérance de Y_n.

Exercice 2

On souhaite dépister, grâce à un contrôle sanguin, quels sont les bovins atteints par un certain virus dans un troupeau de n bêtes. On sait que chaque bête a, indépendamment des autres, une probabilité p d'être atteinte ($p \in]0, 1[$).
Comme chaque test coûte cher, on procède de la manière suivante : on forme des groupes de m bêtes (on suppose que m divise n) ; dans chaque groupe, on mélange les prélèvements sanguins des bovins en un seul "super échantillon" dans lequel on teste la présence du virus (il suffit qu'une seule bête du groupe soit infectée pour que le test soit positif). Si on décèle la présence du virus dans un super échantillon, on teste toutes les bêtes du groupe séparément.

1. Quel est la loi du nombre de bêtes atteintes dans le troupeau ?
   Rappeler sans calcul son espérance et sa variance.
2. Calculer l'espérance du nombre de tests effectués.
3. Pour quelles valeurs de p vaut-il mieux choisir $m = n$ plutôt que $m = 1$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Pour un entier $N \geqslant 1$, on considère $N+1$ urnes opaques qui contiennent chacune N boules. L'urne numéro k contient k boules rouges et $N-k$ boules noires. Le joueur choisit une de ces urnes au hasard et y tire successivement n boules, chaque boule étant remise avant le tirage suivant. Le joueur ne sait pas la composition de l'urne dans laquelle il tire.
On désigne par A_n l'événement "Les n boules tirées par le joueur sont rouges".

1. Quelle est la probabilité de A_n ?
2. Sachant que le joueur a tiré n boules rouges et qu'il ne change pas d'urne pour effectuer le $(n+1)$-ième tirage, quelle est la probabilité qu'il tire encore une boule rouge ?
3. Déterminer la limite quand N tend vers $+\infty$ des probabilités calculées aux deux questions précédentes.

Exercice 2

Deux joueurs A et B jouent à un jeu consistant en une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie. Le joueur A a la probabilité p de gagner en obtenant Pile, et B a la probabilité $q = 1-p$ de gagner en obtenant Face.
Le joueur qui gagne la partie est celui qui a, pour la première fois, deux victoires de plus que l'autre.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour qu'au n-ième coup, les deux joueurs soient à égalité ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour qu'au n-ième coup, A gagne la partie ?
3. Quelle est la probabilité que A gagne la partie ?
4. Quelle est la probabilité que la partie ne s'arrête pas ?
5. Soit X le nombre aléatoire de lancers effectués jusqu'à obtention d'un gagnant.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On joue à Pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque tour, la probabilité d'obtenir Pile est $2/3$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux Pile consécutifs. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Déterminer les valeurs de p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout tout $n \geqslant 4$, $p_n = \dfrac{2}{9}p_{n-2} + \dfrac{1}{3}p_{n-1}$.
3. Calculer l'expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, pour un réel q, sur lequel on imposera des conditions assurant la convergence de la série étudiée.
4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 2

On observe la reproduction de virus : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X suit une "loi géométrique sur $\mathbb{N}$" de paramètre $0 < p < 1$, puis meurt, autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$$

1. Rappeler l'espérance et la variance d'une loi géométrique.
   Calculer, pour tout $r \in [0, 1]$, $f(r) = \mathbb{E}[r^X]$.
2. On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a X_1 virus (X_1 suit la loi géométrique de paramètre p). Chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon cette même loi de géométrique avant de mourir. Au deuxième jour, on a X_2 virus. Et ainsi de suite...
   On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Montrer que (u_n) est convergente.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (d) Déterminer la limite de (u_n) en fonction de p. Comment interpréter ce résultat ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4, change d'état de la façon suivante :

- à l'instant $t = 0$, S_1 est allumé
- Si à l'instant $t = n$, S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n+1$ et ceci de manière équiprobable.
- Si à l'instant $t = n$, S_k $(k \neq 1)$ est allumé, alors c'est le spot S_{k-1} qui s'allume à l'instant $t = n + 1$

Ainsi, à chaque instant, un et un seul spot est allumé. Soit X la variable aléatoire réprésentant le premier instant où S_2 s'allume.

1. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 soit constamment allumé jusqu'à $t = n$.
2. Calculer la probabilité des événements : $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$ pour $n \geqslant 3$.
4. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 2

On considère une usine produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1, alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2.

1. Quelle est la probabilité qu'un objet défectueux provienne de la chaîne A ?
2. On suppose que le nombre d'objets produits par A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. X est la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X = k \,|\, Y = n)$ pour tous entiers k et n.
   (c) En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n > 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$
2. On suppose que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance.
3. Réciproquement, supposons que X admette une espérance. Montrer que la suite $(n\mathbb{P}(X > n))$ converge vers 0, puis que
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$
4. On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
Que vaut $\mathbb{P}(X \leqslant k$?
En déduire la loi de X.
Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0.25.

1. Un client appelle le service à n reprises. X est la variable aléatoire comptant le nombre de fois que le client a dû subir un retard. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance. Calculer la probabilité que le client subisse au moins un retard.
2. Le nombre d'appels reçus chaque jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. Notons Z le nombre d'appels traités en retard.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Z = k \,|Y = n)$ pour tous entiers k et n.
   (b) Déterminer la loi de Z.
3. En 2011, le standard a reçu une succession d'appels indépendants. On note U le premier appel reçu, traité en retard. Donner la loi de U ainsi que son espérance.