Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère le jeu suivant : un joueur lance un dé à six faces non biaisé. Si le résultat est pair, le score X du joueur est ce qu'indique la face du dé. Si le résultat est impair, le joueur doit appuyer sur un bouton et un ordinateur tire au hasard et de manière uniforme un nombre entre 0 et 1, qui forme le score X du joueur.

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
2. Préciser la fonction de répartition de X et la tracer.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Une infinité de joueurs $J_1, J_2, \ldots$, jouent l'un après l'autre à Pile ou Face dans l'ordre de leurs indices. Chacun possède a priori une pièce différente, qui fait Pile avec probabilité $p_k \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q_k = 1 - p_k$. (On posera $q_0 = 1$ par convention).

Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs a obtenu Pile.
On note G_k l'événement "le joueur J_k gagne" et on suppose l'indépendance mutuelles de toutes les suites de résultats des coups joués.

1. Déterminer pour tout $k \geqslant 1$, la probabilité $\mathbb{P}(G_k)$ de l'événement G_k.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par
$$u_n = q_0 q_1 \cdots q_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} q_k$$
Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $a \in [0,1]$.
3. Déterminer en fonction de a la probabilité que le jeu se termine.
4. On suppose dans cette question que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $q_n = \exp\left(-\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.
Soit N la variable aléatoire donnant le numéro du joueur gagnant si le jeu se termine et donnant 0 sinon. Déterminer la loi de N. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On dispose d'un alcotest fiable à 98%, c'est-à-dire que 98% des personnes ayant bu de l'alcool ont un test positif et que 98% des personnes n'ayant pas bu d'alcool ont un test négatif. On sait qu'à un moment donné, 2% des automobilistes ont bu de l'alcool (et c'est déjà trop !)

1. Calculer la probabilité qu'un alcotest effectué sur un automobiliste pris au hasard soit positif.
2. Donner la probabilité que l'automobiliste ait bu de l'alcool sachant que le test est positif.
3. Donner la probabilité que l'automobiliste n'ait rien bu sachant que le test est négatif.

Exercice 2

Un avion effectue des passages au-dessus d'une cible et tire une fois à chaque passage jusqu'à ce que cette cible soit atteinte et donc détruite (un seul tir au but suffit à détruire la cible).

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si l'avion doit effectuer un n-ème passage, la probabilité que la cible soit détruite au cours de ce raid est de $\dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer la probabilité que la cible soit détruite au cours du n-ème passage.
   Quelle est la probabilité que la cible ne soit jamais détruite ?
2. Dans cette question, on suppose que pour des questions d'autonomie, l'avion ne peut effectuer que p passages au plus au-dessus de la cible. Calculer la probabilité que la cible soit détruite.
3. On suppose que l'avion est ravitaillé en vol. Il peut donc effectuer autant de passages que nécessaire. Peut-on déterminer le nombre moyen de passages effectués par l'avion au-dessus de la cible pour la détruire ?
4. On suppose que deux avions similaires (ravitaillés en vol) sont envoyés pour détruire la cible et qu'ils effectuent leurs raids et leurs tirs simultanément.
   (a) Déterminer 4 réels a, b, c, d tels que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait
   $$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{(n+1)^2}$$
   (b) Calculer la probabilité que la cible soit touchée simultanément par les deux avions.
   On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   (c) Déterminer la probabilité pour que la cible ne soit atteinte que par un seul avion.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On rappelle la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \frac{2-p}{p^2}$.

A l'entraînement, un basketteur met le ballon dans le panier avec une probabilité p.

1. Soit N le nombre minimal de lancers que le basketteur doit faire pour voir passer le ballon dans le panier. Par exemple, si le ballon est dans le panier au premier coup, $N = 1$. Donner la loi de N, son espérance et sa variance.
2. Soit n un entier naturel. Maintenant, le basketteur compte le nombre minimal de lancers nécessaires, X, pour mettre n paniers.
   Donner pour tout entier $k > 0$, $\mathbb{P}(X = k)$.
3. Expliquer pourquoi X peut être vu comme une somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont on donnera la loi.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Un avion effectue des passages au-dessus d'une cible et tire une fois à chaque passage jusqu'à ce que cette cible soit atteinte et donc détruite (un seul tir au but suffit à détruire la cible).
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si l'avion doit effectuer un n-ème passage, la probabilité que la cible soit détruite au cours de ce raid est de $\dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer la probabilité que la cible soit détruite au cours du n-ème passage.
   Quelle est la probabilité que la cible ne soit jamais détruite ?
2. Dans cette question, on suppose que pour des questions d'autonomie, l'avion ne peut effectuer que p passages au plus au-dessus de la cible. Calculer la probabilité que la cible soit détruite.
3. On suppose que l'avion est ravitaillé en vol. Il peut donc effectuer autant de passages que nécessaire. Peut-on déterminer le nombre moyen de passages effectués par l'avion au-dessus de la cible pour la détruire ?
4. On suppose que deux avions similaires (ravitaillés en vol) sont envoyés pour détruire la cible et qu'ils effectuent leurs raids et leurs tirs simultanément.
   (a) Déterminer 4 réels a, b, c, d tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n^2} + \dfrac{d}{(n+1)^2}$.
   (b) Calculer la probabilité que la cible soit touchée simultanément par les deux avions.
   On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   (c) Déterminer la probabilité pour que la cible ne soit atteinte que par un seul avion.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère deux urnes A et B et 4 boules : deux blanches et deux noires.
On choisit au hasard deux boules que l'on place dans l'urne A, les deux autres étant alors placées dans l'urne B. On effectue ensuite une suite de tirages de la façon suivante : à chaque tirage, on extrait au hasard une boule de chaque urne, puis on les remet après les avoir échangées.
On note X_0 le nombre de boules noires initialement dans l'urne A et pour tout $n \geqslant 1$, X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A à l'issue de n tirages (donc juste avant le tirage suivant).
On note, pour tout entier $n \geqslant 0$, $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.

1. Donner une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
   (b) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale, une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $M = PDP^{-1}$.
3. En déduire que les trois suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

Exercice 2

Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables. L'une contient 5 allumettes, l'autre en contient 2. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère deux urnes. Celle de gauche contient initialement ($t = 0$) deux boules blanches, et celle de droite deux boules noires. A chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, on part de la configuration du tour $t - 1$, on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on les échange. On note X_t le nombre de boules blanches dans l'urne de gauche.

1. Déterminer X_0 et X_1. Quelles sont les valeurs possibles pour X_t, $t \geqslant 2$?
2. Déterminer pour $i = 0, 1, 2$, et $k \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(X_k = i) > 0$, la valeur de $\mathbb{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j)$ pour $j = 0, 1, 2$.
3. On note z_k le vecteur $z_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $z_{k+1} = M z_k$.
4. Calculer les valeurs propres de M.
5. En déduire que les composantes de z_k convergent. Que dire de la somme des composantes de z_k ? Déterminer le vecteur limite.

Exercice 2

On jour à Pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque tour, la probabilité d'obtenir Pile est $2/3$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux Pile consécutifs. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Déterminer les valeurs de p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout tout $n \geqslant 4$, $p_n = \dfrac{2}{9} p_{n-2} + \dfrac{1}{3} p_{n-1}$.
3. Calculer l'expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n$, pour un réel q, sur lequel on imposera des conditions assurant la convergence de la série étudiée.
4. Calculer l'espérance de X.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère une loterie qui propose un tirage quotidien avec des gains croissants linéairement : au jour numéro n, elle permet de gagner n euros.
Un joueur tente sa chance chaque jour. On suppose qu'il a, chaque jour, une probabilité p $(0 < p < 1)$ de gagner. Les tirages sont indépendants.
On note $X_0 = 0$ et X_n son plus gros gain après le tirage du jour n. On a donc pour tout n, $X_n = n$ s'il gagne la n-ième loterie, et $X_n = X_{n-1}$ s'il la perd.

1. Notons $u_n = \mathbb{E}[X_n]$. Montrer que $u_0 = 0$ et que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = (1-p)u_{n-1} + pn$.
2. Soit $v_n = u_n - n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par (v_n).
3. Etudier la convergence de (v_n). En déduire les réels a, b tels que $u_n = an + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
4. Que dire de la suite de terme général $\mathbb{V}[X_n]$?

Exercice 2

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4, change d'état de la façon suivante :

- à l'instant $t = 0$, S_1 est allumé
- Si à l'instant $t = n$, S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n+1$ et ceci de manière équiprobable.
- Si à l'instant $t = n$, S_k $(k \neq 1)$ est allumé, alors c'est le spot S_{k-1} qui s'allume à l'instant $t = n + 1$

Ainsi, à chaque instant, un et un seul spot est allumé. Soit X la variable aléatoire réprésentant le premier instant où S_2 s'allume.

1. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 soit constamment allumé jusqu'à $t = n$.
2. Calculer la probabilité des événements : $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$ pour $n \geqslant 3$.
4. Déterminer l'espérance de X.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in \mathbb{N}$ sur un segment gradué de 0 à N.
À chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec une probabilité p ($p \in]0,1[$, $p \neq 1/2$) ou un bond de -1 avec une probabilité $q = 1 - p$.
Notons x_n l'abscisse de la puce à l'instant n. Le processus s'arrête lorsque la puce atteint la position 0 ou N.
Nous cherchons la probabilité que le processus soit sans fin.

1. Soit u_a la probabilité que, la particule partant de a, le processus s'arrête en 0. Que vaut u_0 ? u_N ?
   Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$. En déduire une expression de u_a.
2. On note v_a la probabilité que, la particule partant de a, le processus s'arrête en N.
   Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.
3. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n > 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$
2. On suppose que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance.
3. Réciproquement, supposons que X admette une espérance. Montrer que la suite $(n\mathbb{P}(X > n))$ converge vers 0, puis que
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$
4. On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   Que vaut $\mathbb{P}(X \leqslant k$?
   En déduire la loi de X.
   Calculer $\mathbb{E}[X]$.