Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On dispose d'un alcotest fiable à 98%, c'est-à-dire que 98% des personnes ayant bu de l'alcool ont un test positif et que 98% des personnes n'ayant pas bu d'alcool ont un test négatif. On sait qu'à un moment donné, 2% des automobilistes ont bu de l'alcool (et c'est déjà trop !)

1. Calculer la probabilité qu'un alcotest effectué sur un automobiliste pris au hasard soit positif.
2. Donner la probabilité que l'automobiliste ait bu de l'alcool sachant que le test est positif.
3. Donner la probabilité que l'automobiliste n'ait rien bu sachant que le test est négatif.

Exercice 2

Pour tout entier strictement positif n et pour tout nombre réel x strictement positif, on note

$$v_n(x) = \frac{1 - \exp(-nx)}{n(n+1)}$$

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$
2. En admettant que pour tout réel $y \in]-1, 1[$, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$
montrer que
$$f(x) = (1 - \exp(x)) \ln(1 - \exp(-x))$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. Tracer son graphe.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.

1. Préliminaire : pour tout $q \in]-1, 1[$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge et exprimer sa limite en fonction de q.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1}$. En déduire que si $|x| < 1/2$, $f_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite que l'on notera $f(x)$.
3. Calculer $(2 - 3x + x^2)f_n(x)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire une formule simple pour $f(x)$.
4. En déduire une formule simple pour u_n en fonction de n.

Exercice 2

Pour un entier $N \geqslant 1$, on considère $N + 1$ urnes opaques qui contiennent chacune N boules. L'urne numéro $k \in [\![0, N]\!]$ contient k boules rouges et $N - k$ boules noires. Le joueur choisit une de ces urnes au hasard et y tire successivement n boules, chaque boule étant remise avant le tirage suivant. Le joueur ne sait pas la composition de l'urne dans laquelle il tire. On désigne par A_n l'événement "les n boules tirées par le joueur sont rouges".

1. Quelle est la probabilité de A_n ?
2. Sachant que le joueur a tiré n boules rouges et qu'il ne change pas d'urne pour effectuer le $(n + 1)$-ième tirage, quelle est la probabilité qu'il tire encore une boule rouge ?
3. Déterminer la limite quand $N \to +\infty$ des probabilités calculées aux deux questions précédentes.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Un signal binaire (-1 ou 1) doit transiter par n relais ($n \geqslant 1$) avant d'arriver à son destinataire. Lors de chaque relais, il y a une probabilité p pour que le signal émis vers le relais suivant soit inversé. On suppose que les relais sont indépendants.

1. Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $\Omega = \{-1, 1\}^n$, et préciser la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. On cherche la probabilité p_n que le signal finalement transmis soit identique au signal initial.
Donner une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1}, et en déduire p_n en fonction de p et n.
3. On pose, pour $k \in [\![0, n]\!]$,
$$E_k = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \ / \ Card(i \in [\![1, n]\!] \ / \ w_i = -1) = k\}$$
où $Card(X)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble X supposé fini.
   (a) Ecrire l'événement "le signal finalement transmis est identique au signal initial" en fonction des événements $E_0, E_1, \dots, E_n$.
   (b) Calculer à l'aide de la formule du binôme les sommes suivantes :
$$S_1 = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k=2p}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k=2p+1}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
   (c) Retrouver alors par un raisonnement direct, l'expression de p_n en fonction de n.
   (d) Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2

Soit p un entier positif.

1. Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$, montrer que
$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$
2. Montrer la convergence de la série de terme général u_n donné par :
$$u_n = (-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$
3. Pour tout entier N, on pose $S_N = u_0 + \cdots + u_N$ et S la somme de la série. Montrer que pour tout $N \geqslant 0$, il existe R_N tel que
$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{S_N}{2} + R_N$$
avec $|R_N| \leqslant 2^{-(N+2)}$.
4. Calculer S dans le cas $p = 2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Un marcheur se déplace le long d'une rue rectiligne. Il avance pas à pas avec une probabilité 1/2 d'avancer vers la droite ou vers la gauche.

1. Déterminer la probabilité que le marcheur revienne exactement à son point de départ au bout de n pas, où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Le marcheur a à présent quatre directions possibles équiprobables (Est, Ouest, Nord et Sud). Répondre à nouveau à la question précédente.

On n'obtiendra pas nécessairement d'expression simplifiée des probabilités en question, c'est la méthode de résolution qui compte ici.

Exercice 2

On note E_n l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On appelle involution de E_n toute application f de E_n dans E_n telle que $f \circ f = Id$. On note t_n le nombre d'involutions de E_n.

1. Montrer que $t_{n+1} = t_n + n t_{n-1}$.
2. On pose $t_0 = 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{t_n x^n}{n!}$ converge pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

   On note $f(x)$ cette somme.
3. On admettra que pour tout réel x tel que $|x| < 1$, f est dérivable en x et que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n x^{n-1}}{(n-1)!}$.

   Trouver une relation entre f et f'.
4. A l'aide de $f(x) = e^{-x-\frac{x^2}{2}} f(x)$, montrer que $f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.
   En déduire la valeur de t_n sous la forme d'une somme.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit p un entier positif.

1. Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$, montrer que
$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$
2. Montrer la convergence de la série de terme général u_n donné par :
$$u_n = (-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$
3. Pour tout entier N, on pose $S_N = u_0 + \cdots + u_N$ et S la somme de la série. Montrer que pour tout $N \geqslant 0$, il existe R_N tel que
$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{S_N}{2} + R_N$$
avec $|R_N| \leqslant 2^{-(N+2)}$.
4. Calculer S dans le cas $p = 2$.

Exercice 2

On considère deux urnes. Celle de gauche contient initialement ($t = 0$) deux boules blanches, et celle de droite deux boules noires. A chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, on part de la configuration du tour $t-1$, on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on les échange. On note X_t le nombre de boules blanches dans l'urne de gauche.

1. Déterminer X_0 et X_1. Quelles sont les valeurs possibles pour X_t, $t \geqslant 2$?
2. Déterminer pour $i = 0, 1, 2$, et $k \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(X_k = i) > 0$, la valeur de $\mathbb{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j)$ pour $j = 0, 1, 2$.
3. On note z_k le vecteur $z_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $z_{k+1} = M z_k$.
4. Calculer les valeurs propres de M.
5. En déduire que les composantes de z_k convergent. Que dire de la somme des composantes de z_k ? Déterminer le vecteur limite.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit α un réel et soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution positive, qu'on note x_n.
2. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ (avec } \beta \in \mathbb{R}), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

Exercice 2

On dispose d'un alcotest fiable à 98%, c'est-à-dire que 98% des personnes ayant bu de l'alcool ont un test positif et que 98% des personnes n'ayant pas bu d'alcool ont un test négatif. On sait qu'à un moment donné, 2% des automobilistes ont bu de l'alcool (et c'est déjà trop !)

1. Calculer la probabilité qu'un alcotest effectué sur un automobiliste pris au hasard soit positif.
2. Donner la probabilité que l'automobiliste ait bu de l'alcool sachant que le test est positif.
3. Donner la probabilité que l'automobiliste n'ait rien bu sachant que le test est négatif.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.

1. Préliminaire : pour tout $q \in]-1, 1[$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge et exprimer sa limite en fonction de q.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1}$. En déduire que si $|x| < 1/2$, $f_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite que l'on notera $f(x)$.
3. Calculer $(2 - 3x + x^2)f_n(x)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire une formule simple pour $f(x)$.
4. En déduire une formule simple pour u_n en fonction de n.

Exercice 2

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in \mathbb{N}$ sur un segment gradué de 0 à N.
À chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec une probabilité p ($p \in]0, 1[$, $p \neq 1/2$) ou un bond de -1 avec une probabilité $q = 1 - p$.
Notons x_n l'abscisse de la puce à l'instant n. Le processus s'arrête lorsque la puce atteint la position 0 ou N. Nous cherchons la probabilité que le processus soit sans fin.

1. Soit u_a la probabilité que, la particule partant de a, le processus s'arrête en 0. Que vaut u_0 ? u_N ?
   Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$. En déduire une expression de u_a.
2. On note v_a la probabilité que, la particule partant de a, le processus s'arrête en N.
   Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.
3. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?