Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.

1. Préliminaire : pour tout $q \in]-1, 1[$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge et exprimer sa limite en fonction de q.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1}$. En déduire que si $|x| < 1/2$, $f_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite que l'on notera $f(x)$.
3. Calculer $(2 - 3x + x^2)f_n(x)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire une formule simple pour $f(x)$.
4. En déduire une formule simple pour u_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est N définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la lettre utilisée montre la formation de cette matrice).

1. Déterminer le rang de N, puis celui de $N - I$. En déduire que 0 et 1 sont des valeurs propres de N.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ induit un endomorphisme $\widetilde{f}$ de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base trouvée dans la question précédente ?
4. En déduire que 2 est une valeur propre de f, puis déterminer un vecteur propre associé.
5. En déduire que N est diagonalisable.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est la limite de cette suite ?
2. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   Montrer que la quantité $S_{2n} - S_n$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire pour la suite (S_n) ?
3. (a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right) < \dfrac{3}{x+1}$ et en déduire que, pour $n \geqslant 1$, on a : $u_n \leqslant \dfrac{3}{n+1}$.

   (b) Vérifier que, pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
   En déduire que la suite (σ_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $\sigma_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$ est convergente.
4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{1}{2}$ et retrouver ainsi la convergence de la suite (σ_n).

Exercice 2

Soit x un réel fixé. On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = x^2(1 - x^2)^{n-1}$$

1. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x.
2. Calculer, quand la série converge,
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$
3. Quelle est la limite de $S(x)$ quand x tend vers 0 en étant différent de 0 ?
4. Soit $\varepsilon \in]0, \sqrt{2}[$.
   Montrer que le maximum U_n de $|u_n|$ sur $[-\sqrt{2} + \varepsilon, \sqrt{2} - \varepsilon]$ existe et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_n$ diverge.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit α un réel et soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique racine positive, qu'on note x_n.
2. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ (avec } \beta \in \mathbb{R}), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n^2 \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.
3. En déduire que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.
   (On pourra étudier au préalable la suite $(u_{n+1}^2 - u_n^2)$.)

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et $(I - A)^2$.
2. Déterminer le spectre de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. La somme $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Ker}(A)$ est-elle directe ?
5. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = M$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - na_n$$
2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
   (b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.
   (a) Montrer que pour tous n et k de $\mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leqslant \sum\limits_{j=n+1}^{n+k} b_j$.
   (b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x^k \exp(x)$$

pour tout x réel. On note E_k l'espace vectoriel engendré par $f_0, f_1, \ldots, f_k$.

1. Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$ est une base de E_k.
   On se place désormais dans E_3 et on considère l'application définie, pour tout $f \in E_3$, par :

$$\Phi(f) = f''' - 2f'' + f'$$

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_3.
3. Φ est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.

1. Préliminaire : pour tout $q \in]-1, 1[$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge et exprimer sa limite en fonction de q.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1}$. En déduire que si $|x| < 1/2$, $f_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite que l'on notera $f(x)$.
3. Calculer $(2 - 3x + x^2)f_n(x)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire une formule simple pour $f(x)$.
4. En déduire une formule simple pour u_n en fonction de n.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$. Pour tout réel λ, on définit l'application :

$$f_\lambda : A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(les coefficients non représentés sont tous nuls).

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et λ pour que la matrice $f_\lambda(A)$ soit diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que
$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$$
3. Pour quelles valeurs de λ, l'application f_λ est-elle un endomorphisme ?
Pour ces valeurs, l'endomorphisme f_λ est-il diagonalisable ?
4. Que dire de l'application g telle que
$$g(A) = \begin{pmatrix} a_{1,n} & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1,n} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} ?$$
Est-ce un endomorphisme, est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit α un réel et soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution positive, qu'on note x_n.
2. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Etudier la convergence des séries suivantes :
$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ (avec } \beta \in \mathbb{R}), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, f un endomorphisme de E et $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, n vecteurs $(n \geqslant 2)$ de E deux à deux distincts, engendrant E. On suppose que pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $f(a_i) = a_{i+1}$ et $f(a_{n-1}) = a_0$.

1. Rappeler ce que signifie que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ engendre E.
2. Calculer $f^m(a_j) = f \circ \cdots \circ f(a_j)$ pour m entier, $m \leqslant n$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. En déduire que f^n est l'identité, mais qu'aucun des f^m, $1 \leqslant m < n$ ne l'est.
3. Déterminer le rang et le noyau de f.
4. Montrer que les valeurs propres de f sont 1 et/ou -1.
5. Montrer qu'aucun des a_j n'est vecteur propre de f.
   (Raisonner par l'absurde en supposant que l'un des a_j l'est et aboutir à une contradiction).
6. En conclure que tous les (a_j, a_{j+1}) forment des bases de E, et montrer que l'écriture de f dans une telle base est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ 1 & \beta_j \end{pmatrix}$$
   (On ne cherchera pas à déterminer les valeurs précises des α_j et β_j).
7. Montrer que les β_j sont tous égaux.

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$. On rappelle que par convention, $0^0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$
2. Soit pour tout naturel n,
$$u_n = \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$
   Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Pour tout entier naturel N, on note $S_N = \sum_{n=0}^{n} u_n$ et S la somme de la série. Montrer que pour tout entier naturel N, il existe R_N tel que
$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{S_N}{2} + R_N$$
   où $|R_N| \leqslant \dfrac{1}{2N+2}$.
4. Calculer S dans le cas $p = 2$.