Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit λ un réel fixé. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la seule valeur propre est λ. Soit e_1 un vecteur propre associé.

1. Montrer que quelque soit le choix de e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$, f est représenté dans cette base par une matrice de la forme
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
pour un certain réel c.
2. Montrer que l'on peut choisir e_2 de telle sorte que $c = 0$ ou 1.
3. Pour ce choix, calculer B^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

Pour tout entier strictement positif n et pour tout nombre réel x strictement positif, on note

$$v_n(x) = \frac{1 - \exp(-nx)}{n(n+1)}$$

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$
2. En admettant que pour tout réel $y \in]-1, 1[$, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$
montrer que
$$f(x) = (1 - \exp(x)) \ln(1 - \exp(-x))$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. Tracer son graphe.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x^k \exp(x)$$

pour tout x réel. On note E_k l'espace vectoriel engendré par $f_0, f_1, \ldots, f_k$.

1. Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$ est une base de E_k.
   On se place désormais dans E_3 et on considère l'application définie, pour tout $f \in E_3$, par :

$$\Phi(f) = f''' - 2f'' + f'$$

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_3.
3. Φ est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 2

Soit α un réel et soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution positive, qu'on note x_n.
2. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ (avec } \beta \in \mathbb{R}), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres tous strictement positifs.
On note pour tout entier n,
$$V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$
On veut montrer que les séries $\sum v_k$ et $\sum \frac{v_{k+1}}{\sqrt{V_k}}$ sont de même nature (i.e. convergentes ou divergentes).

1. Montrer que pour $k \geqslant 1$,
$$v_{k+1} = \left(\sqrt{V_{k+1}} - \sqrt{V_k}\right)\left(\sqrt{V_{k+1}} + \sqrt{V_k}\right)$$
2. En déduire l'équivalence demandée.

Exercice 2

1. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Quel est le rang de A ? Montrer que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que B est diagonalisable et qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.
2. On se propose de démontrer que si f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables, alors f et g commutent si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g.
   (a) Montrer que si f et g admettent une base commune de vecteurs propres, alors $f \circ g = g \circ f$.
   On admet que si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ diagonalisable et si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u, alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.
   (b) Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
      i. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.
      ii. En déduire que f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   On lui associe la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
   $$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{x_k}{x_k+1}$$
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers un réel λ tel que $0 \leqslant \lambda < 1$.
3. Donner un exemple de suite (x_n) pour laquelle on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Montrer que $\lambda \neq 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{x_n}$ converge.
5. On suppose que la suite (x_n) est définie par :
   $$\begin{cases} x_0 > 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ x_{n+1} = x_n^2 \end{cases}$$
   Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est N définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la lettre utilisée montre la formation de cette matrice).

1. Déterminer le rang de N, puis celui de $N - I$. En déduire que 0 et 1 sont des valeurs propres de N.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ induit un endomorphisme $\widetilde{f}$ de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base trouvée dans la question précédente ?
4. En déduire que 2 est une valeur propre de f, puis déterminer un vecteur propre associé.
5. En déduire que N est diagonalisable.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 2u + Id_E = 0$.

1. u est-il inversible ? Si oui, calculer son inverse.
2. Déterminer les valeurs propres de u. u est-il diagonalisable ?
3. On pose $k = \dim(\mathrm{Ker}(u - Id_E))$. Montrer que $k \geqslant \dfrac{n}{2}$.
4. Si $k = n - 1$, montrer qu'il existe une base $(e1, \dots, e_n)$ de E telle que $u(e_j) = e_j$ pour $j \leqslant n-1$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$. On rappelle que par convention, $0^0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$
2. Soit pour tout naturel n,
$$u_n = \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$
Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Pour tout entier naturel N, on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} u_n$ et S la somme de la série. Montrer que pour tout entier naturel N, il existe R_N tel que
$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{S_N}{2} + R_N$$
où $|R_N| \leqslant \dfrac{1}{2N+2}$.
4. Calculer S dans le cas $p = 2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels de taille $n \times n$. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité.
Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = M^2$.

1. Trouver un polynôme P tel que $X^2 - (X-1)P = 1$. S'en inspirer pour exhiber une matrice A telle que $M^2 - (M - I_n)A = I_n$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(M - I_n) \oplus \operatorname{Ker}(M^2)$.
3. Lorsque $n = 3$ et que 1 est valeur propre de M, montrer que M est semblable à l'une des 4 matrices suivantes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}$$

Pour x réel et n naturel, on définit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k x^k$$

1. Préliminaire : pour tout $q \in]-1,1[$, montrer que la série $\sum q^n$ converge et exprimer sa limite en fonction de q.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant 2^{n+1}$.
3. En déduire que si $|x| < \frac{1}{2}$, $f_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini vers une limite que l'on notera $f(x)$.
4. Calculer $(2 - 3x + x^2)f_n(x)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
   En déduire une formule simple pour $f(x)$.
5. En déduire une formule simple pour u_n en fonction de n.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$P = \frac{1}{n-1}(A^2 - A)$$

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.
4. Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$x + 1 < e^x < xe^x + 1$$

2. Posons $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right)$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie, et qu'elle est monotone.

3. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

   et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

   (Indication, on pourra utiliser l'équivalent suivant en $x = 0$:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
5. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n \leqslant 2u_{n_0}$$