Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [-1,1], \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [-1, 0]$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) et (w_n) convergent.
3. Montrer que (u_n) diverge, sauf pour deux valeurs particulières de u_0 que l'on précisera.

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels de taille $n \times n$. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité.
Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = M^2$.

1. Trouver un polynôme P tel que $X^2 - (X-1)P = 1$. S'en inspirer pour exhiber une matrice A telle que $M^2 - (M - I_n)A = I_n$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(M - I_n) \oplus \operatorname{Ker}(M^2)$.
3. Lorsque $n = 3$ et que 1 est valeur propre de M, montrer que M est semblable à l'une des 4 matrices suivantes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n^2 - 4) \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?
2. Etudier la convergence de (u_n) quand $u_0 > 4$, puis quand $u_0 \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.
3. Existe-t-il des valeurs $u_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite (u_n) ne prend que deux valeurs distinctes ?

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$ et T l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction T_f définie de la manière suivante :

$$\forall x \in [0,1], \quad T_f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer une expression explicite simple de $T^n = T \circ \cdots \circ T$, l'itérée n-ième de T.
2. Justifier brièvement que T est un endomorphisme. T est-il injectif ?
3. Déterminer ses valeurs propres λ telles que $|\lambda| \geqslant 1$, ainsi que les sous-espaces propres associés.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par récurrence comme suit. On part de $u_1 \in]0,1]$ et pour $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = f_n(u_n), \quad \text{où } f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

1. Montrer que (u_n) est une suite convergente, on note ℓ sa limite.
   Prouver que $\ell = 0$, par exemple en effectuant un raisonnement par l'absurde.
2. En étudiant les variations des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que $(nu_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite croissante. Montrer qu'elle admet une limite $\ell' \in]0,1]$.
4. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 0$ et

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = nu_n$$

   En tirer la valeur de ℓ'.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, f un endomorphisme de E et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, n vecteurs ($n \geqslant 2$) de E deux à deux distincts, engendrant E. On suppose que pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $f(a_i) = a_{i+1}$ et $f(a_{n-1}) = a_0$.

1. Rappeler ce que signifie que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ engendre E.
2. Calculer $f^m(a_j) = f \circ \cdots \circ f(a_j)$ pour m entier, $m \leqslant n$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. En déduire que f^n est l'identité, mais qu'aucun des f^m, $1 \leqslant m < n$ ne l'est.
3. Déterminer le rang et le noyau de f.
4. Montrer que les valeurs propres de f sont 1 et/ou -1.
5. Montrer qu'aucun des a_j n'est vecteur propre de f.
   (Raisonner par l'absurde en supposant que l'un des a_j l'est et aboutir à une contradiction).
6. En conclure que tous les (a_j, a_{j+1}) forment des bases de E, et montrer que l'écriture de f dans une telle base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ 1 & \beta_j \end{pmatrix}$$

   (On ne cherchera pas à déterminer les valeurs précises des α_j et β_j).
7. Montrer que les β_j sont tous égaux.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$$

   (a) Etudier les variations de la fonction f_n (on discutera selon la parité de n)
   (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$ (on rappelle que $e < 3$).
   On note u_n cette solution.
   (c) Montrer que $u_n > 1$.
   (d) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\ln(1 + x) = ax + bx^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

   où a et b sont deux constantes que l'on déterminera et ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
3. On pose $v_n = u_n - 1$. Montrer que

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

4. On pose $w_n = u_n - 1 - \dfrac{1}{n}$. Donner un équivalent de w_n.
   Que vient-on de trouver pour la suite (u_n) ?

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$ un entier et A une matrice réelle de taille $n \times n$. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité de même taille, et on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Calculer le rang de B en fonction de celui de A.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit une valeur propre de B.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de B en fonction de celles et ceux de A.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de B.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $A^3 - 3A^2 - 4A + 8I_3$.
   En déduire que les valeurs propres de A sont des racines de $X^3 - 3X^2 - 4X + 8$.

   On admettra dans la suite que réciproquement, les racines de $X^3 - 3X^2 - 4X + 8$ sont des valeurs propres de A.
2. Montrer que A admet trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles par : $f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2 - 4x + 8\right)$.
   (a) Montrer que $f(\lambda_2) = \lambda_2$.
   (b) Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$
   (c) Montrer que pour tout λ de $[1,2]$, on a
   $$|f(\lambda) - f(\lambda_2)| \leqslant \frac{1}{3}|\lambda - \lambda_2|$$
4. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $x_0 \in [1,2]$ et pour tout $n \geqslant 0$,
   $$x_{n+1} = f(x_n)$$
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$x + 1 < e^x < xe^x + 1$$
2. Posons $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$,
   $$u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right)$$
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie, et qu'elle est monotone.
3. Prouver que
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
   et que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels de taille $n \times n$. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité.
Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = M^2$.

1. Trouver un polynôme P tel que $X^2 - (X-1)P = 1$. S'en inspirer pour exhiber une matrice A telle que $M^2 - (M - I_n)A = I_n$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M^2)$.
3. Lorsque $n = 3$ et que 1 est valeur propre de M, montrer que M est semblable à l'une des 4 matrices suivantes,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :
$$x + 1 < e^x < xe^x + 1$$
2. Posons $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right)$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie, et qu'elle est monotone.
3. Prouver que
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$
et que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = e^{3x}, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \sin(x), \quad f_4(x) = \cos(x)$$

et on note E l'espace vectoriel engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
2. Soit $h > 0$. On note
$$T_h : f \in E \longmapsto T_h(f) = f(\cdot + h)$$
où $f(\cdot + h)$ est la fonction qui à x associe $f(x+h)$.
Montrer que T_h est un endomorphisme de E.
Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T_h soit diagonalisable.

Exercice 2

Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers et $(P_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de polynômes définis par

$$P_n(X) = X^n - \left(b_1 X^{n-1} + \cdots + b_{n-1}X + b_n\right)$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine dans $]0, +\infty[$.
(On pourra pour cela raisonner par récurrence).
On notera dans la suite cette unique racine λ_n.
2. Montrer que la suite (λ_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (λ_n) converge dès que $\forall j \geqslant 1, b_j = 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
On considère φ l'application définie sur $\mathcal{C}$ de la manière suivante : pour $f \in \mathcal{C}$, la fonction $g = \varphi(f)$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme. Est-il surjectif ? Injectif ?
2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, vérifie $h' = \gamma h$ si et seulement s'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $g(x) = \gamma e^{\delta x}$.
   (On pourra pour cela considérer les fonctions de la forme $g(x)e^{-\gamma x}$)
3. On dit que f est un vecteur propre pour φ si f n'est pas la fonction nulle, et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé valeur propre) tel que $\varphi(f) = \lambda f$.
   Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de φ.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$$
2. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$
   On note $\forall n \geqslant 0$, $v_n = u_n^2$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$2 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 2 + \frac{1}{2n}$$
   (b) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.