Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = x^k \exp(x)$$

pour tout x réel. On note E_k l'espace vectoriel engendré par $f_0, f_1, \dots, f_k$.

1. Montrer que $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ est une base de E_k.

On se place désormais dans E_3 et on considère l'application définie, pour tout $f \in E_3$, par

$$\Phi(f) = f''' - 2f'' + f'$$

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_3.
3. Φ est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$. Pour tout réel λ, on définit l'application :

$$f_\lambda : A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(les coefficients non représentés sont tous nuls).

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et λ pour que la matrice $f_\lambda(A)$ soit diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que
$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$$
3. Pour quelles valeurs de λ, l'application f_λ est-elle un endomorphisme ?
Pour ces valeurs, l'endomorphisme f_λ est-il diagonalisable ?
4. Que dire de l'application g telle que
$$g(A) = \begin{pmatrix} a_{1,n} & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1,n} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} ?$$
Est-ce un endomorphisme, est-elle diagonalisable ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les trois fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto 1, \qquad f_2 : x \longmapsto x \qquad \text{et} \qquad f_3 : x \longmapsto \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ engendré par (f_1, f_2, f_3);

1. Prouver que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
2. A toute fonction f de E, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = (xf)'$, dérivée de la fonction $x \mapsto xf(x)$.
   Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E dont on donnera la matrice M dans la base (f_1, f_2, f_3).
3. (a) Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse (éviter le plus possible les calculs).
   (b) Résoudre dans E l'équation :
   $$\Phi(f) = a + bx + x\ln|x|$$
   Déterminer en particulier une primitive de $g : x \mapsto x\ln|x|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$P = \frac{1}{n-1}(A^2 - A)$$

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.
4. Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit λ un réel fixé. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la seule valeur propre est λ. Soit e_1 un vecteur propre associé.

1. Montrer que quelque soit le choix de e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$, f est représenté dans cette base par une matrice de la forme
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
pour un certain réel c.
2. Montrer que l'on peut choisir e_2 de telle sorte que $c = 0$ ou 1.
3. Pour ce choix, calculer B^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

Soit E l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Supposons que des éléments $f_1, f_2, \dots, f_p$ de E vérifient
(i) $f_1 \neq 0_E, \dots f_p \neq 0_E$
(ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_p = Id$ où Id est l'application identité.
(iii) $f_i \circ f_j = 0$ pour $i \neq j$ avec $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$

Pour $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ fixés, on pose
$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_p f_p$$

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $f_i \circ f_i = f_i$.
2. Calculer f^k pour tout entier $k \geqslant 1$.
3. Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ forme une famille libre de E.
4. Montrer que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont des valeurs propres de f.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$. On note Id_E l'endomorphisme identité de E. On considère un endomorphisme u de E tel que

$$u^2 - 2u + Id_E = 0$$

où l'on a noté $u^2 = u \circ u$.

1. Montrer que u est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer les valeurs propres de u.
3. u est-il diagonalisable ?
4. On note k la dimension de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$: prouver que $k \geqslant \dfrac{n}{2}$.
5. On suppose dorénavant que $k = n-1$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $u(e_j) = e_j$ pour $j \leqslant n-1$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

Exercice 2

Pour $n \geqslant 2$ et des réels $a_1, \ldots, a_n$, on considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Discuter le rang de M en fonction des a_k.
2. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M si et seulement si

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \cdots - a_n = 0$$

   Exhiber également une base du sous-espace propre associé et préciser sa dimension.
3. En déduire que :
   (a) la matrice M est diagonalisable si et seulement si P admet n racines distinctes.
   (b) si $a_n \geqslant 0$, alors M admet au moins une valeur propre positive.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application trace, définie de la sorte : pour $M = (m_{i,j})$, on pose

$$Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$$

Soient A et B deux matrices fixées non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & Tr(AX) \end{array}$$
est une application linéaire et donner la dimension de son noyau.
2. On étudie maintenant l'application
$$\varphi \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X + Tr(AX)B \end{array}$$
Montrer que φ est une application linéaire qui n'est pas l'identité.
3. Montrer que 1 est valeur propre de φ. Donner la dimension de l'espace propre associé.
4. Conclure que φ est diagonalisable si et seulement si $Tr(AB) \neq 0$.

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$P = \frac{1}{n-1}(A^2 - A)$$

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.
4. Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$. On note Id_E l'endomorphisme identité de E. On considère un endomorphisme u de E tel que

$$u^2 - 2u + Id_E = 0$$

où l'on a noté $u^2 = u \circ u$.

1. Montrer que u est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer les valeurs propres de u.
3. u est-il diagonalisable ?
4. On note k la dimension de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$: prouver que $k \geqslant \dfrac{n}{2}$.
5. On suppose dorénavant que $k = n - 1$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $u(e_j) = e_j$ pour $j \leqslant n - 1$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$P = \frac{1}{n-1}(A^2 - A)$$

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.
4. Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit x un nombre réel et $M(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

1. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble E est-il stable par :
   – la multiplicaion par un scalaire ?
   – l'addition des matrices ?
   – la multiplication des matrices ?
3. Les éléments de E sont-ils inversibles ? Si oui, leur inverse appartient-il à E ?
4. Les éléments de E sont-ils diagonalisables ?
5. Exprimer $[M(1)]^n$ en fonction de l'entier n.

Exercice 2

Soit a un réel non nul et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

On fixe maintenant un entier $n \geqslant 1$ et $2n$ réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ (certains d'entre eux peuvent être nuls). On note M la matrice $M = (a_i b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

3. Montrer que $M = A$ pour des paramètres n, a_i et b_j à préciser.
4. Donner les valeurs propres de M (et leur multiplicité) en fonction des a_i et des b_j, et indiquer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

On note G l'ensemble des matrices

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & M_x \end{array}$$

   vérifie : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x+y) = M_x \times M_y$

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, M_x est inversible et que $M_x^{-1} \in G$.
2. (a) En déduire M_x^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Calculer $M_x^3 - 3M_x^2 + 3M_x - I_3$.
3. Soit x un réel fixé.
   On note f_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_x dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que f_x possède une unique valeur propre, que l'on déterminera, et donner la dimension du sous-espace propre associé E_x.
   L'endomorphisme f_x est-il diagonalisable ?
   On suppose désormais $x \neq 0$.

   (b) Justifier que $\mathcal{U} = (e_2, e_3, e_1 - xe_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Donner la matrice N_x de f_x dans cette base.

   (c) Calculer N_x^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$P = \frac{1}{n-1}(A^2 - A)$$

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.
4. Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

Oral type HEC/ESCP : 30 minutes de préparation.

Exercice 1

Question de cours : Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et donner une CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application

$$\varphi : P \in E \longmapsto \varphi(P) \in E$$

où $(\varphi(P))(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et donner sa matrice dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, c'est-à-dire déterminer l'élément situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne de cette matrice.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de φ
   (c) Déterminer un polynôme annulateur de φ
   (d) Etudier la diagonalisabilité de φ.
2. (a) Montrer que pour tout $P \in E$,
$$(\varphi^n(P))(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) \right)$$
   (b) En déduire, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, la valeur de :
$$S_j = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k} k^j \right)$$
3. Retrouver le résultat précédent pour $j \in \{0, 1, 2\}$ en considérant la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1-x)^n$.

Exercice 2 (sans préparation)

Soit $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tM$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer ses valeurs propres, φ est-il diagonalisable ?