Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soient k et n deux entiers strictement positifs, soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles, et soient $U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ deux matrices quelconques.

1. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ de matrice CV.
   Montrer qu'elle réalise un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(A + UCV)$ sur $\mathrm{Ker}(C^{-1} + VA^{-1}U)$, et que son inverse a pour matrice $-A^{-1}U$.
2. En déduire que $A + UCV$ est inversible si seulement si $C^{-1} + VA^{-1}U$ l'est, et qu'alors

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

3. Soit X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $I_n + {}^tXX$ est inversible, d'inverse à calculer.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, $(n \geqslant 2)$. Soit f un endomorphisme de E. On note I l'endomorphisme identité et pour tout j entier naturel, f^j représente l'endomorphisme de E défini par :

$$f^0 = I, \text{ et si } j \geqslant 1, f^j = f \circ f^{j-1}$$

On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que :

$$f^{n-1}(x) \neq 0, \text{ et } f^n(x) = 0$$

1. Montrer que $\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.
2. On pose $\mathcal{F} = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\big\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et qu'une base de $\mathcal{F}$ est $(I, f, \dots, f^{n-1})$.
3. On suppose $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et que la matrice associée à f dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que f vérifie les hypothèses de l'exercice et déterminer $\mathcal{F}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \frac{1}{2}\big(P(X) + P(X+1)\big)$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
   Dans la suite, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note $Q_k(X) = \varphi^{-1}(X^k)$.
2. Calculer Q_0, Q_1 et Q_2. Montrer $Q'_k = kQ_{k-1}$.
3. Prouver que $Q_k(X+1) - Q_k(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} Q_j$
   et en déduire que $Q_k = X^k - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} Q_j$
4. Calculer Q_3 et Q_4.
5. Montrer que $Q_k(1-X) = (-1)^k Q_k(X)$. En déduire que Q_k est divisible par $2X - 1$ si k est impair, et par $X(X-1)$ si k est pair.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $f_k = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i\right) - e_k$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.
3. Déterminer la matrice P^{-1}.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AMA = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{E}_A$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer $\mathcal{E}_A$ si A est inversible.
3. Montrer que $M \in \mathcal{E}_A$ si et seulement si $\forall X \in \mathrm{Im}(A),\ MX \in \mathrm{Ker}(A)$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}_A$?
4. Déterminer $\mathcal{E}_A$ si
$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$$
avec a, b des réels fixés. On pourra considérer le cas $a = 1$, $b = 2$ avant de traiter le cas général.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$. On note Id_E l'endomorphisme identité de E. On considère un endomorphisme u de E tel que
$$u^2 - 2u + Id_E = 0$$
où l'on a noté $u^2 = u \circ u$.

1. Montrer que u est inversible et calculer son inverse.
2. Soit λ une valeur propre de u. On rappelle que cela signifie qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$. Montrons qu'on a
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
Déterminer les valeurs propres possibles de u.
3. Supposons qu'on trouve une base formée de vecteurs propres de u, c'est-à-dire de vecteurs x non nuls vérifiant $u(x) = \lambda x$ pour un λ valeur propre de u. Quelle serait la matrice de u dans cette base ? Est-ce possible ?
4. On note k la dimension de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$: prouver que $k \geqslant \dfrac{n}{2}$.
5. On suppose dorénavant que $k = n - 1$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $u(e_j) = e_j$ pour $j \leqslant n - 1$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans E. On note f^2 l'application composée $f \circ f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. On définit une application linéaire g par $g : \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(f^2) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

   Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$
3. Prouver que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ et que les rangs de f et g vérifient $rg(g) \leqslant rg(f)$.
4. Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Exercice 2

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on dit qu'une matrice X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $X^m = 0$. De même, on dira que X est unipotente si $I_3 - X$ est nilpotente, où I_3 représente la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

De même si N est unipotente, on pose : $\ln(N) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(I_3 - N)^n}{n}$.

1. Montrer que les formules précédentes ont bien un sens.
2. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

3. Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que N est nilpotente et que U est unipotente.
   Montrer que $\exp\big(\ln(U)\big) = U$ et $\ln\big(\exp(N)\big) = N$.
4. Pour t réel, on pose $U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on a $U(s)U(t) = U(s + t)$.
   Montrer que $U(t) = \exp(tN)$, où N est une matrice nilpotente que l'on déterminera.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$mat_{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = A$$

1. Calculer A^2. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
2. Montrer que $y \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow f(y) = y$
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
5. Soit donc $\mathcal{B}$ la base composée des vecteurs obtenus dans la question 4.
   Proposer deux méthodes pour obtenir $mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 2

Soit f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$f(P)(X) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. A quelle condition l'équation $f(P)(X) = Q(X)$ admet-elle au moins une solution ? Si P est une solution, quelles sont toutes les solutions ?
3. Soient les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ définis par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour $k \geqslant 2$, $f(P_k) = P_{k-2}$ avec $P_k(0) = P_k(1) = 0$.
   (a) Montrer que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont bien définis et déterminer leur coefficient dominant.
   (b) Pour $k \geqslant 1$, exprimer P_k en fonction de $Q_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$.
   (c) Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les trois fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto 1, \qquad f_2 : x \longmapsto x \qquad \text{et} \qquad f_3 : x \longmapsto \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ engendré par (f_1, f_2, f_3);

1. Prouver que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
2. A toute fonction f de E, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = (xf)'$, dérivée de la fonction $x \mapsto xf(x)$.
   Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E dont on donnera la matrice M dans la base (f_1, f_2, f_3).
3. (a) Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse (éviter le plus possible les calculs).
   (b) Résoudre dans E l'équation :
   $$\Phi(f) = a + bx + x \ln|x|$$
   Déterminer en particulier une primitive de $g : x \mapsto x \ln|x|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour trois réels a, b, c, on considère le système linéaire suivant, d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

Montrer que la solution est unique si et seulement si $abc \neq 0$, et exhiber dans ce cas le triplet solution.
Discuter le nombre et la forme des solutions lorsque $abc = 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice 1

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\varphi(P)$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = P(x) - \int_0^x P(t)dt$$

1. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Ecrire la matrice de φ dans les bases canoniques $(1, X, X^2)$ et $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
4. Déterminer : $\left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \varphi(P)(X) = \dfrac{-1}{3}X^3 + 3X^2 - 5X + 1\right\}$

Exercice 2

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application *trace*, définie de la sorte : pour $M = (m_{i,j})$,

$$Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$$

1. Montrer que Tr est une application linéaire, vérifiant $Tr(AB) = Tr(BA)$ pour toutes matrices A et B.
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel existe un réel λ_u tel que pour toute matrice M, $Tr(u(M)) = \lambda_u Tr(M)$ (on dit que u dilate la trace avec un facteur $\lambda_u \ldots$).
   (a) Montrer que $v : M \mapsto \dfrac{1}{n}Tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve la trace, i.e. qui la dilate avec un facteur 1.
   (b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(Tr) \oplus Vect(I_n)$.
   (c) En déduire que l'ensemble des endomorphismes u dilatant la trace et tels que $u(I_n) = \lambda_u I_n$ est un sous-espace vectoriel dont on précisera la dimension.