*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

# Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AMA = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{E}_A$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer $\mathcal{E}_A$ si $A$ est inversible.
3. Montrer que $M \in \mathcal{E}_A$ si et seulement si $\forall X \in \mathrm{Im}(A),\ MX \in \mathrm{Ker}(A)$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}_A$ ?
4. Déterminer $\mathcal{E}_A$ si
$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$$
avec $a, b$ des réels fixés. On pourra considérer le cas $a = 1$, $b = 2$ avant de traiter le cas général.

---

# Exercice 2

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

(On a posé $f^0 = Id_E$ (endomorphisme identité de $E$), $f^1 = f$, et pour tout $p \geqslant 1$, $f^{p+1}$ est défini par la relation de récurrence $f^{p+1} = f^p \circ f$).

On choisit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\big(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$ forme une base de $E$.
2. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $E_i$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille
$$(f^i(a), f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a)).$$
Montrer que tous les sous-espaces vectoriels $E_i$ sont **stables par** $f$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in E_i, \quad f(x) \in E_i$$
3. Montrer que $E_0 = E$, $E_1 = \mathrm{Im}(f)$ et $E_{n-1} = \mathrm{Ker}(f)$
4. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, non réduit au vecteur nul et stable par $f$. On considère
$$I = \{i \in [\![0, n-1]\!] \ / \ f^i(a) \in F\}$$
Montrer que $n - 1 \in I$.
5. Déterminer tous les sous-espaces stables par $f$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

## Exercice 1

Pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\varphi(P(X))$ l'unique polynôme $Q(X)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x) - \int_0^x P(t)dt$$

1. Montrer que $\varphi$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice de $\varphi$ dans les bases canoniques respectives $(1, X, X^2)$ et $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer le noyau de $\varphi$ et le rang de $\varphi$.
4. Déterminer l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que

$$\varphi(P(X)) = \frac{-1}{3}X^3 + 3X^2 - 5X + 1.$$

---

## Exercice 2

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $p$ tel que $N^p = 0$. On note $I_r$ la matrice identité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
2. On fixe désormais $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et $p$ un entier tel que $N^p = 0$.
   (a) Rappeler la formule donnant la valeur des sommes partielles $1 + x + \cdots + x^n$ d'une série géométrique (pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ entier).
   (b) S'en inspirer pour écrire, pour tout entier $q$, $I_n - N^q$ comme $(I_n - N)M_q$ où $M_q$ est une matrice à expliciter en fonction de $N$ et $q$.
   (c) En déduire que $I_n - N$ est inversible, et préciser son inverse.
   (d) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

# Exercice 1

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$. On note $f^2$ l'application composée $f \circ f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. On définit une application linéaire $g$ par $g : \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(f^2) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

   Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$
3. Prouver que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ et que les rangs de $f$ et $g$ vérifient $rg(g) \leqslant rg(f)$.
4. Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

---

# Exercice 2

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on dit qu'une matrice $X$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $X^m = 0$. De même, on dira que $X$ est unipotente si $I_3 - X$ est nilpotente, où $I_3$ représente la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $A$ est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

De même si $N$ est unipotente, on pose : $\ln(N) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(I_3 - N)^n}{n}$.

1. Montrer que les formules précédentes ont bien un sens.
2. Soient $A$ et $B$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

3. Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $N$ est nilpotente et que $U$ est unipotente.
   Montrer que $\exp\big(\ln(U)\big) = U$ et $\ln\big(\exp(N)\big) = N$.
4. Pour $t$ réel, on pose $U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $U(s)U(t) = U(s+t)$.
   Montrer que $U(t) = \exp(tN)$, où $N$ est une matrice nilpotente que l'on déterminera.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

# Exercice 1

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Un endomorphisme $u$ sur $E$ est dit nilpotent s'il existe un entier $p$ tel que $u^p = u \circ \cdots \circ u = 0$. Soit un tel endomorphisme $u$.

1. Montrer que le rang de $u$ est strictement inférieur à $n$.
2. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est stable par $u$ si $u(F) \subset F$. Montrer que $u$ restreint à un tel sous-espace $F$ forme un endomorphisme de $F$, noté $u_{|F}$, et que le rang de $u_{|F}$ est strictement inférieur à la dimension de $F$ dès que $F$ n'est pas le sous-espace trivial $\{0\}$.
3. Soient maintenant $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $n$ endomorphismes nilpotents de $E$, commutant deux à deux, c'est-à-dire, tels que pour tout $i$ et $j$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.
   Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$ en étudiant par récurrence le rang de $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$

---

# Exercice 2

Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \frac{1}{2}\left(P(X) + P(X+1)\right)$$

1. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme.

Dans la suite, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note

$$Q_k(X) = \varphi^{-1}(X^k)$$

2. Calculer $Q_0$, $Q_1$ et $Q_2$. Montrer que $Q_k' = kQ_{k-1}$.
3. Prouver que
$$Q_k(X+1) - Q_k(X) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} Q_j$$
   et en déduire que
$$Q_k = X^k - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} Q_j$$
4. Calculer $Q_3$ et $Q_4$.
5. Montrer que $Q_k(1-X) = (-1)^k Q_k(X)$. En déduire que $Q_k$ est divisible par $2X-1$ si $k$ est impair, et par $X(X-1)$ si $k$ est pair.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

# Exercice 1

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $E_n$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$ s'annulant en 0, c'est-à-dire

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(0) = 0\}$$

1. Montrer que $E_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, dont on précisera la dimension et une base simple.
2. Soit $u : P(X) \in E_n \longmapsto X(P(X) - P(X-1))$.
   Montrer que $u$ est un endomorphisme et préciser sa représentation matricielle dans une base exhibée à la question précédente.
3. Dans cette question, $n$ n'est plus fixé. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme quelconque.
   A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $$R = X(P(X) - P(X-1)) \ ?$$

---

# Exercice 2

$p$ étant un entier fixé, avec $p \geqslant 2$, on note $E = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $p$.
$f$ est l'application qui à tout polynôme $P$ de $E$ associe :

$$f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$
2. Déterminer l'image et le noyau de $f$.
3. Soit $A \in E$. A quelle condition l'équation $f(P) = A$ a-t-elle au moins une solution ? Si $U$ est une solution, quelles sont toutes les solutions ?
4. On définit les polynômes $P_0, \ldots, P_p$ par :
   $P_0 = 1, P_1 = X$, et pour $k \geqslant 2, f(P_k) = P_{k-2}$, avec $P_k(0) = P_k(1) = 0$.
   (a) Montrer que les polynômes $P_0, \ldots, P_p$ sont ainsi bien définis.
   (b) Pour $k \in [\![0, p]\!]$, quel est le coefficient dominant de $P_k$?
   Pour $k \geqslant 1$, exprimer $P_k$ à l'aide du polynôme $Q_k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$
   (c) Montrer que $(P_0, \ldots, P_p)$ est une base de $E$ et déterminer la matrice de $f$ relativement à cette base.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

# Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_{\mathcal{E}}(f) = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = A$.

1. Calculer $A^2$.
2. $A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Montrer que $y \in \operatorname{Im}(f) \iff f(y) = y$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f - Id) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
   (Si possible, proposer deux démonstrations de ce résultat)
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

# Exercice 2

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$. On note $f^2$ l'application composée $f \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.
2. On définit une application linéaire $g$ par $g : \begin{array}{ccc} \operatorname{Ker}(f^2) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
   Montrer que $\operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$
3. Prouver que $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f)$ et que les rangs de $f$ et $g$ vérifient $rg(g) \leqslant rg(f)$.
4. Démontrer que $\dim(\operatorname{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(f))$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.*

*Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.*

---

# Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{E}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $f(x,y,z) = (3x, x+2y-z, x-y+2z)$.

1. Justifier que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $mat_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$.
3. Déterminer $mat_{\mathcal{E}'}(f)$.
4. Calculer $A^2 - 4A + 3I_3$.
5. De deux façons, montrer que $A$ est inversible et calculer son inverse.
6. Déterminer les deux racines $\alpha$ et $\beta$ de $X^2 - 4X + 3I_3$.
   Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \alpha Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta I_3)$.
   (Si possible, proposer deux démonstrations de ce résultat).

---

# Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{E}$ la base canonique de $E$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.
   (a) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $mat_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $f$ satisfait les hypothèses de la question 1.
   (b) Déterminer une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.