ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

MATHÉMATIQUES II

Mardi 13 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de la rentabilité du « surbooking » pour une compagnie aérienne.

Partie I : Expression de l'espérance du chiffre d'affaire

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 qui peut accueillir jusqu'à N passagers.
La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.
Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en **centaines** d'euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Préciser, pour tout élément ω de Ω, la valeur de $Y(\omega)$ en fonction de N et de $X(\omega)$, en distinguant les cas $X(\omega) > N$ et $X(\omega) \leqslant N$.
3. Écrire l'expression de G en fonction de n, X, Y.
4. On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N.
   Calculer alors l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de la variable aléatoire G.

La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ et à savoir si le nombre n aurait pu être choisi de façon à optimiser son chiffre d'affaire.

Partie II : Approximations dans des cas particuliers

On reprend, dans cette partie les notations et les définitions de la Partie I.

1. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$.

a) Soit X^* la variable aléatoire définie par : $X^* = \dfrac{2X-n}{\sqrt{n}}$ ·
Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X^*.

b) Par quelle loi approcher la loi de X^* si n est assez grand ? Montrer qu'alors une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est $\Phi\left(\dfrac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$,
où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $f(x) = \dfrac{x+1-2N}{\sqrt{x}}$ ·
Montrer que la fonction f est croissante.

d) On suppose que N est égal à 320 et on donne : $\Phi\left(\dfrac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,609$; $\Phi\left(\dfrac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,592$.

Que peut-on en déduire pour $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ si n est inférieur ou égal à 645, puis si n est supérieur ou égal à 646 ?

2. Pour tout entier naturel non nul m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

a) Montrer que la fonction dérivée de g_m est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g_m'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^m}{m!}$ ·
Montrer qu'elle vérifie la double inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -e^{-m}\dfrac{m^m}{m!} \leqslant g_m'(x) \leqslant 0$.

b) En déduire que, si a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$, on a :

$$0 \leqslant g_m(a) - g_m(b) \leqslant (b-a)e^{-m}\frac{m^m}{m!}$$

3. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que n est strictement supérieur à N.

a) Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.

b) On supposera, dans les prochains calculs, que la loi de la variable aléatoire $n - X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01\,n$ dont on note F la fonction de répartition.
Que vaut alors $\mathbf{P}([X \geqslant N])$?

c) Exprimer le nombre $F(n-N)$ à l'aide d'une fonction g_m particulière de la question **2.**

d) On suppose que N est égal à 300.
Pour tout réel strictement positif α, on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne :

$$F_3(2) \approx 0,423 \ ; \quad F_3(3) \approx 0,647 \ ; \quad e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

Montrer que, si n est égal à 302, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est au plus égal à $0,5$ et que, si n est égal à 303, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est strictement supérieur à $0,6$.

Partie III : Étude d'une suite de variables aléatoires

On suppose, dans cette partie, que N est un entier naturel supérieur ou égal à 2, que p un réel strictement compris entre 0 et 1 et que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\quad X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ et on définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ les variables aléatoires Y_n et G_n par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) - N & \text{si} \quad X_n(\omega) \geqslant N+1 \\ 0 & \text{si} \quad X_n(\omega) \leqslant N \end{cases}$$

$$\text{et} \quad G_n = 0,2\,n + 0,8\,X_n - 2\,Y_n$$

1. a) Soit n un entier naturel non nul. Préciser la loi de X_n.

b) Que peut-on dire de la variable aléatoire Y_n dans le cas $n \leqslant N$?

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

d) Préciser les valeurs que peut prendre Y_n dans le cas $n > N$.

e) Pour tout entier naturel n non nul, comparer les événements $[X_n \geqslant N]$ et $[X_{n+1} \geqslant N]$.
En déduire que la suite $(\mathbf{P}[X_n \geqslant N])_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

f) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et tout réel strictement positif ε, l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left([X_n - np \geqslant -\varepsilon]\right) \geqslant 1 - \frac{np\,(1-p)}{\varepsilon^2}$$

g) Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{np\,(1-p)}{(np-N)^2}$; en déduire l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n \geqslant N]) = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la variable $Y_{n+1} - Y_n$ est une variable de Bernoulli et justifier l'égalité des événements $[Y_{n+1} - Y_n = 1]$ et $[T_{n+1} = 1] \cap [X_n \geqslant N]$.

b) En déduire les égalités :

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}) - \mathbf{E}(Y_n) = p\,\mathbf{P}([X_n \geqslant N])$$

$$\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) = 0,2 + 0,8\,p - 2\,p\,\mathbf{P}([X_n \geqslant N])$$

c) Étudier la variation sur $]0,1[$ de la fonction $\quad x \longmapsto \dfrac{0,2+0,8\,x}{x}$ ·

d) Montrer que, si p est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{6}$, la suite $(\mathbf{E}(G_n))_{n\geqslant 1}$ est croissante.

3. On suppose, dans cette question, que p est strictement supérieur à $\dfrac{1}{6}$ ·

a) Comparer les nombres $\dfrac{0,2+0,8\,p}{2p}$ et 1, puis montrer qu'il existe un entier naturel n_0 supérieur ou égal à N, vérifiant :

$$\mathbf{P}\left([X_{n_0} \geqslant N]\right) > \frac{0,2+0,8\,p}{2p} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n < n_0,\ \mathbf{P}\left([X_n \geqslant N]\right) \leqslant \frac{0,2+0,8\,p}{2p}$$

b) En déduire que la valeur maximale de la suite $(\mathbf{E}(G_n))_{n\geqslant 1}$ est obtenue pour $n = n_0$. On note M cette valeur maximale.

c) Calculer $\mathbf{E}(G_N)$ et en déduire l'inégalité : $\quad M \geqslant (0,2+0,8\,p)N$.

4. On suppose à nouveau, dans cette question, que p est strictement supérieur à $\frac{1}{6}\cdot$

a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $\mathbf{E}(G_n) \leqslant n(0,2+0,8\,p)$.

b) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, l'égalité :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=N}^{n} (k-N)\,\mathbf{P}([X_n = k])$$

c) En déduire, pour $n \geqslant N$, les inégalités $\mathbf{E}(Y_n) \geqslant np - N$ puis $\mathbf{E}(G_n) \leqslant 0,2\,n\,(1-6p) + 2N$.

d) Comparer les nombres $n(0,2+0,8\,p)$ et $0,2\,n\,(1-6p)+2N$.

e) En déduire l'inégalité : $M \leqslant N\,\dfrac{0,2+0,8\,p}{p}\cdot$

5. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$ et que N est égal à 320.
En remarquant que, pour n fixé, la variable aléatoire X_n suit la même loi que la variable aléatoire X de la partie I. et en exploitant les résultats de la question **1.** de la Partie II., déterminer la valeur de n_0 et donner un encadrement pour M.

6. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que N est égal à 300.
On a alors : $\dfrac{0,2+0,8\,p}{2p} \approx 0,501\cdot$
En exploitant les résultats de la question **3.** de la Partie II., déterminer la valeur de n_0 et donner un encadrement pour M.

7. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$, que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant une loi de Poisson de paramètre N et on pose $G_0 = 0$.
Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par E_n l'ensemble fini $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} G_k(\Omega)$.
Soit H_n une variable aléatoire à valeurs dans E_n, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et vérifiant pour tout α de E_n :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}([H_n = \alpha]/[Z = k]) = \mathbf{P}([G_k = \alpha]) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([H_n = \alpha]/[Z \geqslant n+1]) = \mathbf{P}([G_n = \alpha])$$

a) En utilisant la famille d'événements $([Z=0],[Z=1],\ldots,[Z=n],[Z \geqslant n+1])$, établir pour tout entier naturel non nul n, l'égalité :

$$\mathbf{E}(H_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}(G_k)\mathbf{P}([Z=k]) + \mathbf{E}(G_n)\mathbf{P}([Z \geqslant n+1])$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul , l'égalité :

$$\mathbf{E}(H_{n+1}) - \mathbf{E}(H_n) = \left(\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n)\right)\,\mathbf{P}([Z \geqslant n+1])$$

puis que l'espérance $\mathbf{E}(H_n)$ est maximale si n est égal à n_0.

c) Justifier l'inégalité $\mathbf{E}(H_{n_0}) \leqslant M$, puis l'égalité $\mathbf{E}(H_N) = N(0,2+0,8\,p)\,(1-\mathbf{P}([Z=N]))$.

d) On suppose que N est égal à 300 et on donne : $\mathbf{P}([Z=300]) \simeq 0,023$.
Donner un encadrement de $\mathbf{E}(H_{n_0})$.