CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. – E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION LETTRES & SCIENCES-HUMAINES

MATHEMATIQUES

Programme ENS (B/L)

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$.
Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = 1 - F(t)$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, il est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.
On suppose alors que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i, définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, de même loi que T. Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes.
Pour tout entier strictement positif n, soit U_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ qui représente le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

A. Coefficient d'avarie

Dans cette sous-partie, la loi de la variable aléatoire T est telle que, pour tout entier naturel n, l'on ait : $D(n) \neq 0$.

Un composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par :
$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n]/[T > n-1])$$

1) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbf{P}([T = n])$ en fonction de $D(n)$ et de $D(n-1)$, et en déduire l'égalité :
$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

2) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.

   a) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

   b) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.

   c) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \alpha$.

   a) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha).\, D(n-1)$.

   b) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

B. Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier

On suppose, dans cette sous-partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$, que la loi de T est donnée par : $\mathbf{P}([T=1]) = p$ et $\mathbf{P}([T=2]) = 1-p$.

Pour tout entier strictement positif n, soit R_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, prenant la valeur 1 si une panne survient à l'instant n et la valeur 0 sinon. Son espérance est notée r_n.

1) a) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T.

   b) Calculer r_1 et r_2.

2) Soit n un entier strictement positif.

   a) À l'aide de la formule des probabilités totales, écrire une relation donnant $\mathbf{P}([R_{n+2}=1])$ en fonction de $\mathbf{P}([R_{n+1}=1])$ et de $\mathbf{P}([R_n=1])$.

   b) En déduire l'égalité $r_{n+2} = p\, r_{n+1} + (1-p)\, r_n$.

3) a) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \dfrac{1}{2-p} + B(p-1)^n$ où B est une constante réelle que l'on précisera.

   b) En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \dfrac{1}{\mathrm{E}(T)}$.

4) Soit n un entier strictement positif. Exprimer la variable aléatoire U_n à l'aide des variables aléatoires R_i, calculer l'espérance $\mathrm{E}(U_n)$ et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

C. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p. Pour tout entier naturel non nul k, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$.

(S_k désigne donc l'instant où se produit la k-ième panne et le k-ième remplacement.)

1) Soit m un entier naturel. Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité : $\sum\limits_{j=m}^{n} C_j^m = C_{n+1}^{m+1}$.

2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

   b) Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k, \quad \mathbf{P}([S_k = n]) = C_{n-1}^{k-1}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

3) Soit n un entier strictement positif.

   a) Établir l'égalité $\mathbf{P}([U_n = 0]) = (1-p)^n$.

   b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, l'événement $[U_n \geqslant k]$ à l'aide de la variable aléatoire S_k.

   c) En déduire que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

4) Dans cette question, le nombre p est égal à $\frac{1}{200}$.

On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T. À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

a) Préciser la loi de la variable aléatoire U désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus.

b) On désire qu'avec une probabilité de 0,95, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus. A combien peut-on évaluer ce stock ?

On donne : $\sqrt{\frac{995}{2}} \simeq 22,3$ et, en désignant par Φ la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite, $\Phi(1,65) \simeq 0,95$.

Partie 2 : Cas continu

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

A. Loi de survie et coefficient d'avarie

Pour tout réel t positif, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par :

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1) Soit t un réel positif.

Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t,h)$ défini par : $q(t,h) = \mathbf{P}([T \in]t, t+h]/[T > t])$.

a) Établir pour tout réel h strictement positif, l'égalité : $q(t,h) = \dfrac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$.

b) Montrer que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et préciser sa fonction dérivée.

c) Montrer que le rapport $\dfrac{q(t,h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures.

2) On suppose dans cette question que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.

b) Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = \dfrac{1}{\mathrm{E}(T)}$, où $\mathrm{E}(T)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire T.

3) On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t\,e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que la fonction f ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

b) Justifier les égalités : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.

d) Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire T.

e) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. *On donne :* $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$.

f) Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$.

4) On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \pi(t) = \alpha$.

a) Pour tout réel t positif, on pose : $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

B. Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $\mathrm{E}(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par : $\quad c_1 = \dfrac{K+C}{\mathrm{E}(T)}$.

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer au bout de sa durée θ de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\displaystyle\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t}$$

1) Si T admet une densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, à l'aide d'une intégration par parties, établir la formule :

$$\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}([T \leqslant \theta]).\int_0^\theta t\,\frac{f(t)}{F(\theta)}\,\mathrm{d}t + \mathbf{P}([T > \theta]).\theta$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^\theta D(t)\,dt$ peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.

2) Calculer c_1 et, pour tout réel θ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

3) On suppose que T suit la loi décrite dans la question **A**.3.

a) Préciser la valeur de c_1 et montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{\theta \to +\infty} c_2(\theta) = c_1$.

b) Pour tout réel strictement positif θ, on pose :

$$\varphi(\theta) = C\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\theta}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right)$$

Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est strictement positive.
En déduire le tableau de variations de φ.

c) Étudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en θ_0 qui vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$.

d) Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1 + \dfrac{K}{C}\right)$.

e) On suppose, dans cette question, que K et C sont tous deux égaux à 1, et on donne : $c_2(1,5) = 1,5429$ et $c_2(1,45) = 1,5439$.
En déduire un encadrement de θ_0 d'amplitude $0,1$.