CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION LETTRES & SCIENCES-HUMAINES

MATHEMATIQUES

PROGRAMME ENS (B/L)

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On dispose de n jetons numérotés de 1 à n, n étant un entier strictement supérieur à 1. On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Étant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, la suite $(a_k, \ldots, a_p)$ — se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.

On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω, ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n!}$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\mathrm{E}(X)$ son espérance et $\mathrm{V}(X)$ sa variance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$ leur covariance.

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, m\}$ où m est un entier strictement supérieur à 1.

Montrer l'égalité : $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}([X \geqslant k])$.

Partie 1 : Première sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, la première sous-suite croissante est définie de la façon suivante : dans le cas $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; dans le cas contraire, k étant le plus petit entier de $\{1, \ldots, n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, \ldots, a_k)$.

Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe la longueur de sa première sous-suite croissante.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme $2 < 3 < 5$ et $5 > 4$, on a : $L(\omega) = 3$.

1) a) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L ? Que vaut $\mathbf{P}([L = n])$?

   b) Montrer que, pour tout entier k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L \geqslant k]) = \dfrac{1}{k!}\cdot$ En déduire la loi de L.

2) Donner la valeur de $\mathrm{E}(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $\mathrm{E}(L)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Deuxième sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et sa première sous-suite croissante $(a_1, \ldots, a_k)$; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas ; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ est appelée deuxième sous-suite croissante de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a : $L'(\omega) = 2$.

1) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L' ? Que vaut $\mathbf{P}([L' = 0])$?

2) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.

   a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant :

L' \ L	1	2	3
0	0	0	1/6
1	1/6	1/3	0
2	1/3	0	0

   b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.

   c) Calculer la covariance de L et de L'. Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance ?

3) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque strictement supérieur à 1.

   a) Dénombrer les parties de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

   b) En déduire $\mathbf{P}([L + L' = n])$.

   c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L + L' \geqslant k]) = \dfrac{2^k - k}{k!}\cdot$

   d) Donner la valeur de $\mathrm{E}(L + L')$ sous forme d'une somme.

   e) En déduire $\mathrm{E}(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Partie 3 : Nombre de sous-suites croissantes

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n, on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n.

Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe le nombre de ses sous-suites croissantes.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2, 3, 5), (4, 9), (6, 7, 8)$ et (1), on a : $T(\omega) = 4$.

1) a) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.

   b) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 3. Calculer son espérance et sa variance.

2) On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.

   a) Calculer $\mathbf{P}([T = 1])$ et $\mathbf{P}([T = n])$.

   b) Comparer les événements $[L + L' = n]$ et $[T \leqslant 2]$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T = 2])$.

   c) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 4. Calculer son espérance et sa variance.

3) Pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω, associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.

   a) Montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}\cdot$ Donner son espérance et sa variance.

   b) Donner une expression de T en fonction de X_i. En déduire l'égalité : $\mathrm{E}(T) = \dfrac{n+1}{2}\cdot$

   c) Montrer que l'on a : $\forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \dfrac{1}{6}\cdot$ En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})\cdot$

   d) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < i + 2 \leqslant j \leqslant n - 1$, les événements A_i et A_j sont indépendants.

   En déduire l'égalité : $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

   e) Établir enfin l'égalité : $\mathrm{V}(T) = \dfrac{n+1}{12}\cdot$

4) On suppose, dans cette question, que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \ldots, T_{1000}$, mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\dfrac{1}{1000} \displaystyle\sum_{i=1}^{1000} T_i$.

   On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.

   Calculer une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([2,95 < S < 3,05])$.

5) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque strictement supérieur à 1.

   a) Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et k le nombre de ses sous-suites croissantes, quel est le nombre de sous-suites croissantes de la permutation $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$?

   b) En déduire, pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$, l'égalité : $\mathbf{P}([T = k]) = \mathbf{P}([T = n + 1 - k])$.

   Retrouver ainsi la valeur de $\mathrm{E}(T)$.
