Exercice 4.1

On vous propose de jouer à un jeu pouvant comporter plusieurs manches. On suppose les résultats des différentes manches eventuellement jouées indépendants, le gain pour chaque manche étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

1. Dans cette question **vous devez** jouer deux manches et votre gain final est le plus grand des gains de ces deux manches. Quelle est la loi de votre gain ? Quelle est son espérance ?

2. Dans cette question, on suppose que **vous avez le droit** de jouer deux manches, et votre gain final est le gain de la **dernière manche jouée**. Vous décidez alors de la stratégie suivante :

vous vous fixez un seuil s compris entre zéro et un,

$\rightarrow$ si le gain de la première manche est au moins égal à s, alors vous arrêtez le jeu après cette première manche ;

$\rightarrow$ sinon vous jouez une seconde manche.

Quelle est la loi de votre gain final ? Quelle est son espérance ? Quelle valeur de s choisissez-vous ?

3. On suppose maintenant que vous avez le droit de jouer **au maximum trois** manches et votre gain est toujours celui de la dernière manche jouée.

Proposez une stratégie ...

Solution

1. Notons X le supremum de X_1 et X_2 et F_X sa fonction de répartition. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leqslant x) = P((X_1 \leqslant x) \cap (X_2 \leqslant x)) = F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)$$

grâce à l'indépendance des deux variables aléatoires.

$F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geqslant 1$, enfin si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F_X(x) = x^2$,

donc une densité f de X est donnée par $f_X(x) = 2x$, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et 0 sinon, d'où l'on déduit l'espérance : $E(X) = \displaystyle\int_0^1 x.2x dx = \frac{2}{3}$

2. Dans cette deuxième stratégie, on note Y le gain du joueur et F_Y la fonction de répartition de cette variable aléatoire. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P((X_1 \leqslant s) \cap (Y \leqslant x)) + P((X_1 > s) \cap (Y \leqslant x))$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P((X_1 \leqslant s) \cap (X_2 \leqslant x)) + P(s < X_1 \leqslant x)$$

Donc, en-dehors des résultats banals pour $x < 0$ et $x > 1$:

- Si $0 \leqslant x \leqslant s$, alors $F_Y(x) = s \times x + (1 - s) \times 0 = sx$,
- Si $x > s$, on a $F_Y(x) = s \times x + (x - s) = (s + 1)x - s$.

On en déduit une densité g de Y :

$$\text{pour } 0 \leqslant x \leqslant s, g(x) = s \text{ et pour } s < x \leqslant 1, g(x) = s + 1.$$

Cela permet de calculer l'espérance mathématique de Y :

$$E(Y) = \int_0^s sx dx + \int_s^1 (s + 1)x dx = \frac{s^3}{2} + (s + 1)\frac{1 - s^2}{2} = \frac{1 + s - s^2}{2}$$

Donc
$$E(Y) = \frac{1}{2}(-(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4})$$

Cette espérance est maximale en $\frac{1}{2}$ et vaut alors $\frac{5}{8}$.

On constate que la première stratégie n'est que, de peu, plus favorable que cette dernière une fois optimisée.

3. Proposons la stratégie suivante :

On effectue une première manche et si on obtient un gain supérieur ou égal à $\frac{5}{8}$, on arrête. Si on obtient un gain inférieur à $\frac{5}{8}$, alors on décide de poursuivre le jeu en sachant que l'on a le droit de jouer alors une ou deux manches et donc on peut appliquer **maintenant** la stratégie optimisée de la question 2. En procédant ainsi l'espérance de gain est plus grande que $\frac{5}{8}$.

Exercice 4.2

1. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-\ln t)dt$ converge et donner sa valeur.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}dt$ converge pour tout x strictement positif.

On pose alors :

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}dt & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

c) Montrer que F est continue en 0.

d) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et donner ses variations.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=1\\ u_{n+1}=\mathrm{F}(u_n),\ \text{ pour } n\geqslant 0\end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Solution

1. a) La fonction $t\mapsto 1-\ln t$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$. Une primitive de $1-\ln t$ est $t-(t\ln t-t)=2t-\ln t$. Ainsi, pour a tel que $0<a\leqslant 1$

$$\int_a^1 (1-\ln t)dt=\big[2t-\ln t\big]_a^1=2-2a+a\ln a$$

Comme $\lim\limits_{a\to 0} a\ln a=0$, le passage à la limite est possible, ce qui prouve la convergence de l'intégrale, avec :

$$\int_0^1 (1-\ln t)dt=2$$

b) La fonction $h:t\mapsto\dfrac{1-\ln t}{2+t^2}$ est continue sur $]0,x]$. Au voisinage de 0 (et avant 1), on a :

$$0\leqslant\frac{1-\ln t}{2+t^2}\leqslant\frac{1-\ln t}{2}$$

L'intégrale sur $[0,1]$ de cette dernière fonction converge. Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives permet de conclure sur $[0,1]$, donc sur $[0,x]$.

c) La convergence même, pour la borne inférieure 0, de l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ prouve que $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x)=0=\mathrm{F}(0)$.

d) La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. En écrivant :

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^1 h(t)dt+\int_1^x h(t)dt=\mathrm{C}+\int_1^x h(t)dt$$

le théorème fondamental du calcul intégral permet de conclure que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x>0$, $\mathrm{F}'(x)=h(x)$.

Ainsi le signe de $\mathrm{F}'(x)$ est-il celui de $1-\ln x$ et la fonction F est donc croissante sur $[0,e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$.

2. Montrons que l'intervalle $[0,1]$ est stable par F. En effet, par croissance de F sur $[0,1]$:

$$\mathrm{F}([0,1])=[\mathrm{F}(0),\mathrm{F}(1)]=[0,\mathrm{F}(1)]$$

et

$$\mathrm{F}(1)=\int_0^1 h(t)dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-\ln t)dt=1$$

Comme $u_0=1$, on a donc pour tout n de $\mathbb{N}^*, u_n\in[0,1]$.

$\star$ La fonction F est croissante sur le domaine considéré, donc la suite (u_n) est monotone.
Comme $u_1=\mathrm{F}(u_0)=\mathrm{F}(1)\leqslant 1=u_0$, la suite (u_n) est décroissante.
Décroissante et minorée elle converge.

Exercice 4.3

Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation. Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros, x et y étant des réels strictement positifs. Ce commerçant désire déterminer la taille n optimale de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.

On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X. On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison.

On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leqslant n$ et qui vaut 0 si $X > n$.

On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. En distinguant deux cas selon la valeur de U montrer que :

$$Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U).$$

2. a) Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $[0, n]$.

b) Exprimer, sous forme de somme, l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.

c) Montrer enfin que $E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^{n} (k - n)P(X = k) + nx$.

Dans la suite, on suppose que $P(X = 0) < \dfrac{x}{x + y}$

3. a) Exprimer $E(Y_n + 1) - E(Y_n)$ en fonction de x, y et $\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

b) Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que

$$\sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x + y} \text{ et } \sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geqslant \frac{x}{x + y}$$

c) En déduire que le commerçant maximise son espérance de gain, avec un stock de taille $n_0 + 1$.

Solution

1. On a : $U(\Omega) = \{0, 1\}$.

• si $U(\omega) = 1$, alors $X(\omega) \leqslant n$ et $Y_n(\omega) = xX(\omega) - y(n - X(\omega)) = xX(\omega) - y(n - X(\omega))U(\omega) + nx(1 - U(\omega))$.

• si $U(\omega) = 0$, alors $X(\omega) > n$ et $Y_n(\omega) = nx = xX(\omega) - y(n - X(\omega))U(\omega) + nx(1 - U(\omega))$

On peut donc regrouper les deux cas et :

$$Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U).$$

2. a) Si $X(\omega) \leqslant n$, alors $X(\omega) \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et $XU(\omega) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Si $X(\omega) > n$, alors $U(\omega) = 0$ et $XU(\omega) = 0$.

$$\text{XU prend ses valeurs dans } [0, n]$$

b) Ainsi $E(XU) = \sum_{k=0}^{n} kP(XU = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$.

c) U est une variable de Bernoulli et $E(U) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= (x + y)E(XU) - n(x + y)E(U) + nx \\ &= (x + y) \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) - n(x + y) \sum_{k=0}^{n} P(X = k) + nx \end{aligned}$$

$$E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^{n} (k - n)P(X = k) + nx$$

3. a) En utilisant le résultat précédent, il vient

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_{n+1}) - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = x - (x+y)\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n)$$

b) Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la suite $(\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n))_n$ est croissante de limite égale à 1.

Comme $x > 0, y > 0$, on a : $0 < \dfrac{x}{x+y} < 1$ et :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 0) < \frac{x}{x+y}, \ \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n) = 1 > \frac{x}{x+y}$$

On considère alors $\mathcal{A} = \big\{n \in \mathbb{N} \ / \ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n) < \dfrac{x}{x+y}\big\}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide (il contient 0) et est majoré. Il contient un plus grand élément n_0 qui vérifie donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n_0) < \frac{x}{x+y} \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n_0 + 1)$$

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_{n+1}) - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = x - (x+y)\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n) = (x+y)\big(\frac{x}{x+y} - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n)\big)$$

La suite $(\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n))_n$ est donc croissante jusqu'au rang $n_0 + 1$, puis décroissante ; ainsi $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_{n_0+1})$ maximise l'espérance du gain.

Exercice 4.4

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

a) Étudier les variations de la fonction f_n (on discutera selon la parité de n).

b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$ (on rappelle que $e < 3$). On note u_n cette solution.

c) Montrer que $u_n > 1$.

d) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

e) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln(1 + x) = ax + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$, où a et b sont deux constantes que l'on déterminera et ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

3. On pose : $v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4. On pose : $w_n = u_n - 1 - \dfrac{1}{n}$. Donner un équivalent de w_n. Que vient-on de trouver pour la suite $(u_n)_n$?

Solution

1. a) La fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$.

• si n est impair, la fonction f_n est croissante sur $]-\infty, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

• si n est pair, la fonction f_n est décroissante sur $]-\infty, 0]$ croissante sur $[0, n]$, puis à nouveau décroissante sur $[n, +\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

b) On a vu que la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0, n]$.
Comme $f_n(0) < 0$ et $f_n(n) = (n/e)^n - 1 > 0$ (on a $n \geqslant 3$), le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure à l'existence d'un unique $u_n \in]0, n[$ tel que $f_n(u_n) = 0$

c) On a $f_n(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Ainsi $u_n > 1$.

d) On a : $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1}e^{-u_n} - 1 = u_n(u_n^n e^{-u_n}) - 1 = u_n - 1 > 0$.
La croissance stricte de la fonction f_{n+1} sur le domaine utile et la définition de u_{n+1} permettent de dire que $u_{n+1} < u_n$

e) La suite (u_n) est décroissante minorée par 0 : elle converge vers une limite ℓ. Comme $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$, la suite $(\ln(u_n))$ tend vers 0 et donc la suite (u_n) tend vers 1.

2. On demande ici un DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \to \ln(1 + x)$. Par le cours

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

3. Il vient : $1+v_n = n\ln(1+v_n)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, un simple équivalent donne : $nv_n \sim 1$, soit

$$v_n \sim \frac{1}{n}.$$

4. On a montré par la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = 0$. Grâce au développement limité de la question 2, il vient :

$$w_n + 1 + \frac{1}{n} = n\ln\big(w_n + 1 + \frac{1}{n}\big) = n\big(w_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\big(w_n + \frac{1}{n}\big)^2 + o\big(\big(w_n + \frac{1}{n}\big)^2\big)\big)$$

D'où : $w_n + 1 + \dfrac{1}{n} = nw_n + 1 - \dfrac{1}{2}nw_n^2 - \dfrac{1}{2n} - w_n + no\big(\big(w_n + \dfrac{1}{n}\big)^2\big)$

et : $nw_n + \dfrac{3}{2} = n^2w_n - \dfrac{1}{2}n^2w_n^2 - nw_n + o\big(\big(w_n + \dfrac{1}{n}\big)^2\big)$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2w_n = \dfrac{3}{2}$.

On a finalement obtenu : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$

Exercice 4.5

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2 et on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On note Tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application trace, définie, pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{M} = (m_{i,j})$, par :

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$$

Soit A et B deux matrices fixées non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\text{pour tout } \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ \psi(\mathrm{X}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AX})$$

est une application linéaire et donner la dimension de son noyau.

2. On étudie maintenant l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\text{pour tout } \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AX})\,\mathrm{B}$$

Montrer que φ est une application linéaire différente de l'application identité.

3. Montrer que 1 est valeur propre de φ. Donner la dimension de l'espace propre associé.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Tr (AB) pour que φ soit diagonalisable.

Solution

1. La linéarité de ψ est immédiate. La dimension de son noyau se déduit de la formule du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}\ \psi) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}\ \psi) = n^2 - \dim(\mathrm{Im}\ \psi)$$

La seule question est de savoir si ψ est l'application nulle. On sait que la matrice A est non nulle. Soit a_{i_0,j_0} un de ses coefficients non nuls. Considérons alors la matrice X dont le seul terme non nul est x_{j_0,i_0}, ce terme valant 1.

La matrice produit AX a toutes ses colonnes nulles à l'exception de la colonne i_0 qui est une copie de la colonne j_0. La diagonale de AX ne contient qu'un terme non nul : a_{i_0,j_0}. Sa trace est donc égale à ce réel, et elle est donc non nulle (on aurait aussi pu choisir la matrice $\mathrm{X} = {}^t\mathrm{A}$ et la trace de AX est alors la somme des carrés de tous les coefficients de A ...).

Ainsi, ψ n'est pas l'application nulle et son image est donc $\mathbb{R}$ tout entier. On a, finalement :

$$\dim(\mathrm{Ker}\ \psi) = n^2 - 1.$$

2. La linéarité de φ va de soi. Si φ était l'application identique, le produit $\psi(\mathrm{X})\mathrm{B}$ serait nul pour tout X. Comme B n'est pas nulle, cela signifierait que $\psi(\mathrm{X})$ est nul pour tout X. Nous venons de montrer que cela est faux. Ainsi :

$$\varphi \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

3. Résolvons l'équation $\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$. On a :

$$\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \text{ ssi } \psi(\mathrm{X})\mathrm{B} = 0 \text{ ssi } \psi(\mathrm{X}) = 0 \text{ ssi } \mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\psi)$$

Cela prouve que 1 est valeur propre de φ et que le sous-espace propre associé n'est autre que Ker (ψ) qui est de dimension $n^2 - 1$.

4. L'application φ est diagonalisable si et seulement si elle possède une autre valeur propre (dont le sous-espace propre associé sera nécessairement de dimension 1).

Supposons donc qu'il existe une valeur propre λ de φ différente de 1. Il existe une matrice X non nulle telle que $\varphi(\mathrm{X}) = \lambda \mathrm{X}$. Or :

$$\varphi(\mathrm{X}) = \lambda\mathrm{X} \text{ ssi } \mathrm{X} = \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AX})}{\lambda - 1}\mathrm{B}$$

donc X est de la forme $\mu\mathrm{B}$ avec $\mu \neq 0$. On a alors :

$$\mu\mathrm{B} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}\mu\mathrm{B}) = \lambda\mu\mathrm{B} \text{ ssi } 1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \lambda$$

car μ et B sont non nuls et, comme λ est différent de 1, cela prouve que $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \neq 0$.

Réciproquement, si cette dernière condition est réalisée, on a :

$$\varphi(\mathrm{B}) = \mathrm{B} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB})\mathrm{B} = (1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}))\mathrm{B}$$

ce qui prouve que B est vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB})$ qui est différente de 1. Ainsi φ est-elle diagonalisable.

Exercice 4.6

Un signal binaire (-1 ou 1) doit transiter par n relais ($n \geqslant 1$) avant d'arriver à son destinataire. Lors de chaque relais, il y a une probabilité p pour que le signal émis vers le relais suivant soit inversé. On suppose que les relais sont indépendants.

1. Modéliser cette expérience aléatoire par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, où $\Omega = \{-1, 1\}^n$, et préciser la probabilité de chaque événement élémentaire.

2. On cherche la probabilité p_n que le signal finalement transmis soit identique au signal initial.

Donner une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1}, et en déduire p_n en fonction de p et n.

3. On pose pour $k \in [0, n]$:

$$\mathrm{E}_k = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \mathrm{Card}\{i \in [1, n]/\omega_i = -1\} = k\}.$$

où Card(X) désigne le nombre d'éléments de l'ensemble X supposé fini.

a) Écrire l'événement "le signal finalement transmis est identique au signal initial" en fonction des événements $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$.

b) Calculer à l'aide de la formule du binôme les sommes suivantes :

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k = 2p}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_2 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k = 2p+1}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

c) Retrouver alors par un raisonnement direct, l'expression de p_n en fonction de n.

d) Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?

Solution

1. Si on prend $\Omega = \{-1, 1\}^n$, alors Ω représente l'ensemble des 2^n n-uplets de la forme $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, où, pour tout i de $[1, n]$, on pose

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième relais transmet fidèlement le message} \\ -1 & \text{si le } i\text{-ième relais renverse le message} \end{cases}$$

Les fonctionnements des relais étant indépendants, on choisit sur Ω la probabilité produit, soit :

$$\mathrm{P}((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \mathrm{P}(\omega_1) \times \cdots \times \mathrm{P}(\omega_n), \text{ avec } \mathrm{P}(1) = 1 - p \text{ et } \mathrm{P}(-1) = p.$$

2. Notons :

A_i l'événement "le i-ième relais transmet le message initial"

B_i l'événement " le i-ième relais transmet le message transmis par le relais précédent"

On a alors, pour $i \in [2, n]$: $\mathrm{A}_i = (\mathrm{A}_{i-1} \cap \mathrm{B}_i) \cup (\overline{\mathrm{A}_{i-1}} \cap \overline{\mathrm{B}_i})$.

Par incompatibilité de ces deux événements et par indépendance des transmissions :

$$p_i = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = p_{i-1}(1 - p) + p(1 - p_{i-1}) = p + (1 - 2p)p_{i-1}$$

On a également $p_1 = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = 1 - p$.

La suite (p_i) est une suite arithmético-géométrique. On introduit le réel x solution de l'équation $x = p + (1 - 2p)x$, soit $x = 1/2$. La suite $(p_i - 1/2)$ est alors une suite géométrique de raison $1 - 2p$. Finalement :

$$p_n - \frac{1}{2} = (1 - 2p)^{n-1}\big(p_1 - \frac{1}{2}\big), \ ie \ \ p_n = \frac{1 + (1 - 2p)^{n-1}}{2}$$

3. a) L'événement A_n est réalisé si et seulement s'il existe un entier k pair, compris entre 0 et n pour lequel E_k est réalisé. Soit :

$$\mathrm{A}_n = \bigcup_{0 \leq 2j \leq n} \mathrm{E}_{2j}$$

Notons que si $\omega \in \mathrm{E}_k$, alors $\mathrm{P}(\omega) = p^k(1 - p)^{n-k}$ et que E_k est de cardinal $\binom{n}{k}$. Par incompatibilité des événements en cause :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \sum_{0 \leq 2j \leq n} \mathrm{P}(\mathrm{E}_{2j})$$

b) La formule du binôme donne : $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 = (a+b)^n$ et $\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 = (b-a)^n$.
Ainsi :

$$\mathrm{S}_1 = \frac{1}{2}((b+a)^n + (b-a)^n) \text{ et } \mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}((b+a)^n - (b-a)^n)$$

c) En prenant $a = p, b = 1-p$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \frac{1}{2}((p+1-p)^n + (1-p-p)^n) = \frac{1+(1-2p)^{n-1}}{2}$$

d) Comme $|1-2p| < 1$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$ et pour un grand nombre de relais, il y a quasiment 1 chance sur 2 que le message reçu soit identique au message envoyé, et 1 chance sur 2 qu'il soit contraire au message envoyé.

Exercice 4.7

1. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1}$ et la calculer à l'aide du changement de variable affine $u = 2t-1$.

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $\mathrm{I}(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

a) Déterminer la limite de $\mathrm{I}(n,n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}(p,q) = \frac{q}{p+1}\mathrm{I}(p+1,q-1).$$

c) En déduire que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$: $\mathrm{I}(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

3. a) Pour tout $t\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, simplifier l'expression : $\displaystyle\sum_{k=0}^n 2^k t^k(1-t)^k$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \frac{\pi}{2}$.

Solution

1. Le dénominateur ne s'annulant pas, l'intégrant est continu sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$. Ainsi, l'intégrale existe. Le changement de variable proposé est de classe $\mathcal{C}^1$ et donne :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \int_{-1}^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

2. a) Classiquement : $\forall\, t\in[0,1], 0\leqslant t(1-t)\leqslant \dfrac{1}{4}$. On en déduit :

$$0\leqslant \mathrm{I}(n,n)\leqslant \Big(\frac{1}{4}\Big)^n,\text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}(n,n)=0$$

b) Le résultat s'obtient par intégration par parties, les fonctions en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\mathrm{I}(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\Big]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt$$

$$\mathrm{I}(p,q) = \frac{q}{p+1}\mathrm{I}(p+1,q-1)$$

c) On utilise la formule précédente q fois :

$$\mathrm{I}\,(p,q) = \frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\cdots\times\frac{2}{p+q-1}\times\frac{1}{p+q}\mathrm{I}(p+q,0)$$

donc, en multipliant numérateur et dénominateur par $p!$:

$$\mathrm{I}(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}\mathrm{I}(p+q,0).$$

Comme $\mathrm{I}(p+q,0) = \dfrac{1}{p+q+1}$, on obtient le résultat demandé :

$$\mathrm{I}(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!},\text{ valable aussi pour } q=0$$

3. a) Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique dont la raison, comprise entre zéro et $1/2$, est différente de 1. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n 2^k t^k(1-t)^k = \frac{1-(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t(1-t)}$$

b) On remarque que : $\dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \mathrm{I}(k,k)$, donc :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^n 2^k\mathrm{I}(k,k) = \sum_{k=0}^n\int_0^1 2^k t^k(1-t)^k dt = \int_0^1\sum_{k=0}^n 2^k t^k(1-t)^k dt$$

Ainsi :

$$\mathrm{S}_n = \int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2}dt - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t+2t^2}dt$$

La dernière intégrale tend vers zéro car elle est positive et comme on a :

$$1-2t+2t^2 = 2(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$$

ellle est majorée par $\displaystyle\int_0^1 2\times\big(\frac{1}{2}\big)^{n+1}\,dt = \frac{1}{2^n}$. Cela donne le résultat attendu.

Exercice 4.8

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

2. a) Démontrer que les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{I}d)$ et $\mathrm{Ker}\,\big((f - 3\mathrm{I}d)^2\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer T^n pour n entier naturel non nul. En déduire A^n.

4. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner l'expression de $(\mathrm{A}^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

1. Pour déterminer les éléments propres de la matrice A (ou de l'endomorphisme f), on résout le système linéaire $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$, avec
$\mathrm{X} = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Il vient :

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ (3 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$\star$ La valeur $\lambda = 3$ donne les vecteurs colonnes propres $\alpha^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\star$ Si $\lambda \neq 3$, alors $z = 0$ et le système devient $\begin{cases} (\lambda - 2)x + y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$.

Ce système admet une solution non triviale si et seulement si $\lambda = 1$ et les solutions sont alors $\alpha^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à 2 et on en déduit que f n'est pas diagonalisable.

2. On détermine $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{I})^2$ en calculant : $(\mathrm{A} - 3\mathrm{I})^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{I})^2$ est le plan d'équation $2x - 2y = 0$, qui admet pour base la famille des deux vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Il reste à vérifier que la famille de trois vecteurs $((1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0))$ est libre, ce qui peut se faire à l'aide de la méthode du pivot.

b) Dans cette base, la matrice associée à f s'écrit $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On peut écrire $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$, avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On vérifie que D et N commutent, puis que $\mathrm{N}^2 = 0$. Il reste à utiliser la formule du binôme :

$$\mathrm{T}^n = (\mathrm{D} + \mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}^{n-k}\mathrm{N}^k = \mathrm{D}^n + n\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{J}$$

(même pour $n = 0$ ou $n = 1$)

Donc

$$\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base trouvée est

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et on trouve :} \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & 2n3^{n-1} \\ 3^n-1 & 3^n+1 & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 2.3^n \end{pmatrix}$$

4. La matrice triangulaire à diagonale non nulle T est inversible ; il en est donc de même pour la matrice A. On conjecture que A^{-n} s'écrit grâce à la formule précédente, en substituant $-n$ à n. Pour démontrer cette conjecture, il suffit de faire le calcul correspondant.

Exercice 4.9

On considère deux urnes A et B et 4 boules : deux blanches et deux noires.

On choisit au hasard deux boules que l'on place dans l'urne A, les deuix autres étant alors placées dans l'urne B. On effectue ensuite une suite de tirages de la façon suivante : à chaque tirage, on extrait au hasard une boule de chaque urne, puis on les remet après les avoir échangées.

On note X_0 le nombre de boules noires initialement dans l'urne A et pour tout $n \geqslant 1$, X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A a l'issue de n tirages (donc juste avant le tirage suivant).

On note, pour tout entier $n \geqslant 0$: $p_n = P(X_n = 0), q_n = P(X_n = 1)$ et $r_n = P(X_n = 2)$.

1. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.

b) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale, une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

3. a) En déduire que les trois suites $(p_n)_n, (q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes et déterminer leur limites respectives.

Solution

1. On applique la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\}$, aux événements liés à X_{n+1}. Soit :

$P(X_{n+1} = i) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i)P(X_n = 0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i)P(X_n = 1)++P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = i)P(X_n = 2)$

⋆ Si $X_n = 0$, il n'y a aucune boule noire dans A après le n-ième tirage, et le tirage suivant en amènera une sûrement. Donc $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0$.

⋆ De même s'il y a une boule noire dans A à l'issue du $n^{\text{ème}}$tirage, l'événement "il n'y en a plus au tirage suivant" est :

- cette boule a été alors tirée de A ;
- et simultanément une boule blanche a été tirée de B.

Ainsi par indépendance, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Enfin, s'il y avait deux boules noires dans A à l'issue du $n^{\text{ème}}$tirage, il y en a une au tirage suivant, donc $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$.

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}P(X_n = 1)$$

Un raisonnement identique donne :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ (échange des deux noires ou échange des deux blanches)

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1$

et $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

On trouve ainsi : $$\begin{cases} P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}P(X_n = 1) \\ P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \frac{1}{4}P(X_n = 1) + P(X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}P(X_n = 1) \end{cases}$$

La matrice M demandée est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a) $\star$ La matrice M est de rang 2 ; aussi 0 est-il valeur propre et le sous espace propre associé est de dimension 1. On constate que la première et la troisième colonne de M sont égales, ce qui donne, si on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M, que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 0.

$\star$ On constate également que la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. En transposant la matrice M, cela signifie que la somme des éléments de chaque ligne de ${}^t\mathrm{M}$ vaut 1. On sait alors que cela signifie que 1 est valeur propre de ${}^t\mathrm{M}$ donc de M. Pour déterminer les vecteurs propres associés, on résout le système linéaire $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$, qui admet comme solution $\mathrm{X} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

$\star$ Pour trouver la dernière valeur propre il n'y a plus d'astuce au programme ! On trouve (par exemple en utilisant depuis le début la méthode du pivot) que la dernière valeur propre est $\lambda = -1/2$

On résout le système $\mathrm{MX} = -\frac{1}{2}\mathrm{X}$ et il vient $\mathrm{X} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice M admet trois valeurs propres : elle est diagonalisable dans une base de vecteurs propres et par exemple :

$\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$, avec :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3. a) Une récurrence immédiate donne pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \mathrm{M}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{b}{6} \\ \frac{2a}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{b}{6} \\ \frac{a}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{b}{6} \end{pmatrix}$$

avec $a = p_0 + q_0 + r_0 = 1$ et $b = 2p_0 - q_0 + 2r_0$.

Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{6}, \lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{2}{3}, \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{6}$$

Remarque : il est logique de trouver $p_n = r_n$, car les boules blanches et noires jouent des rôles symétriques. Ainsi, pour tout entier n, on a $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 2)$, en échangeant les rôles des couleurs des boules.