# 4

# OPTION B/L

---

**Exercice 4.1.**

Un avion effectue des passages au-dessus d'une cible et tire une fois à chaque passage jusqu'à ce que cette cible soit atteinte et donc détruite (un seul tir au but suffit à détruire la cible).
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si l'avion doit effectuer un $n^{\text{ème}}$ passage, la probabilité que la cible soit détruite au cours de ce raid est de $\dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer la probabilité que la cible soit détruite au cours du $n^{\text{ème}}$ passage. Quelle est la probabilité que la cible ne soit jamais détruite ?

2. Dans cette question, on suppose que pour des questions d'autonomie, l'avion ne peut effectuer que $p$ passages au plus au-dessus de la cible. Calculer la probabilité que la cible soit détruite.

3. On suppose que l'avion est ravitaillé en vol. Il peut donc effectuer autant de passages que nécessaire. Peut-on déterminer le nombre moyen de passages effectués par l'avion au-dessus de la cible pour la détruire ?

4. On suppose que deux avions similaires (ravitaillés en vol) sont envoyés pour détruire la cible et qu'ils effectuent leurs raids et leurs tirs simultanément.

   a) Déterminer 4 réels $a, b, c, d$ tels que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on ait :
$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{(n+1)^2}$$

b) Calculer la probabilité que la cible soit touchée simultanément par les deux avions (on admet le résultat : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

c) Déterminer la probabilité pour que la cible ne soit atteinte que par un seul avion.

---

**Solution :**

1. Notons $p_n$ la probabilité cherchée. Dire que la cible est atteinte au cours du $n^{\text{ème}}$ passage, c'est dire que les $n-1$ premiers passages ont été des échecs et que le $n^{\text{ème}}$ passage permet d'atteindre la cible.
Par conditionnements successifs, les hypothèses faites donnent alors :

$$p_n = \big(1 - \frac{1}{2}\big)\big(1 - \frac{1}{3}\big) \cdots \big(1 - \frac{1}{n}\big)\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

Soit, par télescopage multiplicatif :

$$p_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Le raisonnement fait suppose implicitement $n \geqslant 2$, mais le résultat reste vrai pour $n = 1$, en supprimant le début du raisonnement.

On a $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\big) = 1$ (par télescopage additif), ce qui signifie que l'on est quasi-certain de détruire la cible.

2. La cible n'est pas détruite si et seulement si les $p$ passages sont tous des échecs, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$.

Ainsi, la cible est détruite avec la probabilité $\frac{p}{p+1}$.

3. Soit $X$ le nombre de passages effectués.
On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Ainsi $nP(X = n) = \frac{1}{n+1}$ et la série de terme général $nP(X = n)$ est divergente, ce qui prouve que $X$ n'admet pas d'espérance (certains disent que son espérance est infinie).

4. a) Par réduction au même dénominateur et identification, ou par toute autre méthode, il vient :

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

b) La cible est touchée simultanément par les deux avions s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les deux avions touchent tous deux la cible au cours du

$n^{\text{ème}}$ passage, soit par indépendance supposée du comportement des deux tireurs et disjonction des cas, la probabilité $p$ cherchée vaut : $p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$

Par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N} p_n^2 = -2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$= -2 + \frac{2}{N+1} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(N+1)^2} - 1$$

et par passage à la limite :

$$p = 2\times\frac{\pi^2}{6} - 3 = \frac{\pi^2-9}{3}$$

c) Comme on est quasi-certain de détruire la cible (déjà avec un seul avion, alors avec deux ...), la probabilité de toucher la cible avec un seul avion est :

$$q = 1 - p = 1 - \frac{\pi^2-9}{3} = \frac{12-\pi^2}{3}$$

---

**Exercice 4.2.**

Soit $a$ un réel non nul, et $A$ la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$.

2. Trouver un polynôme $P$ unitaire et de degré 2 annulateur de $A$, c'est-à-dire un polynôme $P$ de la forme $X^2 + \alpha X + \beta$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que la matrice $A$ est inversible. Donner son inverse.

4. Déterminer une expression de $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de la matrice identité $I$ et de la matrice $A$.

5. a) Quelles sont les valeurs propres possibles de $A$ ?

b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

---

**Solution :**

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$

2. On vient de le dire : $P = X^2 - X - 2$ est annulateur de $A$.

3. Ainsi $A^2 - A = 2I$, soit $A\times\big(\frac{A-I}{2}\big) = I$, ce qui suffit pour affirmer que $A$ est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$$

4. On a $A^0 = I = 0.A + 1.I$, $A^1 = A = 1.A + 0.I$, $A^2 = 1.A + 2.I$.

Si on suppose que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = a_n A + b_n I$, alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (a_n A + b_n I)A = a_n A^2 + b_n A = a_n(A + 2I) + b_n A \\ &= (a_n + b_n)A + 2a_n I \end{aligned}$$

Donc $A^{n+1}$ est bien de la forme $a_{n+1}A + b_{n+1}I$, avec $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre deux est $r^2 - r - 2 = 0$ de racines $-1$ et $2$.

Il existe donc $\lambda, \mu$ tels que, pour tout $n$ : $a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$ et les conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donnent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

puis :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \text{ (formule valable pour } n = 0)$$

Soit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}\, A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}\, I$$

(formule valable en fait pour $n \in \mathbb{Z}$.)

5. a) Le polynôme $X^2 - X - 2$ de racines $-1$ et $2$ est annulateur de $A$, donc

$$\operatorname{Spec} A \subset \{-1, 2\}$$

b) On a, pour $C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ :

$$\star\ AC = -C \iff \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ \frac{1}{a}x + y + az = 0 \\ \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y + z = 0 \end{cases} \iff x + ay + a^2 z = 0$$

Ainsi $-1$ est valeur propre de $A$, le sous-espace propre associé étant le plan dont une équation est : $x + ay + a^2 z = 0$.

$$\star\ AC = 2C \iff \begin{cases} -2x + ay + a^2 z = 0 \\ \dfrac{1}{a}x - 2y + az = 0 \\ \dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{1}{a}y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + ay + a^2 z = 0 \\ 3ay - 3a^2 z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $y = az$ et $x = a^2 z$, donc 2 est valeur propre de $A$, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\dim E_{(-1)}(A) + \dim E_{(2)}(A) = 3$, la matrice $A$ est diagonalisable.

---

**Exercice 4.3.**

Une urne contient des boules numérotées de 1 à $N$, où $N$ est un entier supérieur ou égal à 2. Elles sont indiscernables au toucher et l'on effectue $n$ tirages successifs d'une boule avec remise. Pour tout $j$ de $[\![1, n]\!]$, on note $Z_j$ le numéro obtenu au $j^{\text{ème}}$ tirage. On suppose $N$ inconnu et on cherche à l'estimer.

1. On considère la moyenne empirique :

$$M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$$

Calculer l'espérance $E(M_n)$ de $M_n$ et en déduire un estimateur sans biais de $N$.

2. On considère maintenant $X_n = \sup(Z_1, \ldots, Z_n)$ et on cherche à montrer que $X_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $N$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = N$$

a) Donner la fonction de répartition de $X_n$.

b) Montrer que, pour toute variable aléatoire $Y$ à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} P[Y \geqslant k] = E(Y)$$

c) En déduire que $E(X_n) \geqslant N - \dfrac{N}{n+1}$ et conclure.

---

**Solution :**

1. Les tirages ayant lieu avec remise, chaque variable aléatoire $Z_j$ suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, donc $E(Z_j) = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} j = \dfrac{N+1}{2}$, et :

$$E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(Z_j) = \frac{N+1}{2}$$

Ainsi $2M_n - 1$ est un estimateur sans biais de $N$.

2. a) $X_n$ est aussi à valeurs dans $[\![1, N]\!]$ et pour $k \in [\![1, N]\!]$, on a par indépendance des résultats des différents tirages :

$$P(X_n \leqslant k) = P\big((Z_1 \leqslant k) \cap (Z_2 \leqslant k) \cap \ldots \cap (Z_n \leqslant k)\big) = \big(\frac{k}{N}\big)^n$$

b) Il s'agit de manipulations de signes $\sum$ :

$$\sum_{k=1}^{N} P(Y \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N}\big(\sum_{j=k}^{N} P(Y=j)\big) = \sum_{k\leqslant j} P(Y=j) = \sum_{j=1}^{N}\big(\sum_{k=1}^{j} P(Y=j)\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} jP(Y=j) = E(Y)$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{N} P(Y \geqslant k)$$

c) Ainsi :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{N} P(X_n \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N}(1 - P(X_n < k)) = N - \sum_{k=2}^{N} P(X_n < k)$$

$$= N - \sum_{k=2}^{N} P(X_n \leqslant k-1) = N - \sum_{k=2}^{N}\big(\frac{k-1}{N}\big)^n = N - \frac{1}{N^n}\sum_{k=2}^{N}(k-1)^n.$$

Or, par comparaison suite/intégrale, la croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ donne :

$$1^n + 2^n + \cdots + (N-1)^n \leqslant \int_1^N x^n dx = \frac{N^{n+1}}{n+1}$$

et ainsi : $E(X_n) \geqslant N - \dfrac{1}{N^n} \times \dfrac{N^{n+1}}{n+1} = N - \dfrac{N}{n+1}$.

Bref :

$$N - \frac{N}{n+1} \leqslant E(X_n) \leqslant N \text{ et } \lim_{n\to\infty} E(X_n) = N$$

$(X_n)_n$ est bien un estimateur asymptotiquement sans biais de $N$.

---

**Exercice 4.4.**

Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. Vérifier que la partie régulière du développement limité à l'ordre $p$, au voisinage de $x = 0$, de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^n}$ est le polynôme :

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^{p}\binom{k+n-1}{n-1}x^k$$

2. Soit $M$ la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les puissances successives de la matrice $N = I - M$, où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

b) Justifier le fait que $M$ soit inversible et expliciter la matrice $(M^{-1})^n$ à l'aide du polynôme $P_3$.

3. On admettra la formule valable pour tout $x \in ]-1, 1[$ :

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^k$$

Une urne contient 19 boules indiscernables au toucher ; il y a dans cette urne 10 boules blanches, 5 boules rouges et 4 boules noires.
On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
On désigne par $X$ le nombre de tirages nécessaires et par $Y$ le nombre de boules rouges obtenues au cours de l'expérience.

a) Déterminer la loi de $X$.

b) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = i]$ ? En déduire la loi de $Y$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f : x \mapsto (1-x)^{-n}$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, avec : $f'(x) = n(1-x)^{-(n+1)}$, $f''(x) = n(n+1)(1-x)^{-(n+2)}$ , ...
et, plus généralement :

$$f^{(k)}(x) = n(n+1)\dots(n+k-1)(1-x)^{-(n+k)}$$

Ce qui donne :

$$f^{(k)}(0) = n(n+1)\dots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

et par application d'une formule de Taylor-MacLaurin :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{n-1} x^k + o(x^p)$$

2. a) $N = -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = -8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et pour $k \geqslant 4, N^k = 0$.

b) $\star$ $M$ est trigonale inférieure sans terme diagonal nul, donc $M$ est inversible.

$\star$ On a $(1-x)^{-n} = P_3(x) + o(x^3)$, soit $(1-x)^n P_3(x) + o(x^3) = 1$, ou encore :

$$(1-x)^n P_3(x) - 1 = o(x^3)$$

Ainsi $(1-X)^n P_3(X) - 1 = X^4 Q(X)$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et en substituant à $X$ la matrice $N$ :

$$(I-N)^n P_3(N) - I = N^4 Q(N) = 0$$

Soit :

$M^{-n} = P_3(N) = I + nN + \dfrac{(n+1)n}{2} N^2 + \dfrac{(n+2)(n+1)N}{6} N^3$

C'est-à-dire :

$$M^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2n & 1 & 0 & 0 \\ 2n(n+1) & -2n & 1 & 0 \\ -4n(n+1)(n+2)/3 & 2n(n+1) & -2n & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Il y a 10 boules rouges parmi 19 boules, donc les tirages ayant lieu avec remise, on a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(10/19)$$

b) $\star$ Si on sait que $[X = i]$ est réalisé, au cours des $(i-1)$ premiers tirages on n'a obtenu que des boules rouges ou noires et à chaque fois la probabilité d'obtenir une boule rouge vaut $5/9$, donc les tirages ayant toujours lieu avec remise :

$$Y_{[X=i]} \hookrightarrow \mathcal{B}(i-1, 5/9)$$

$\star$ Le système $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet et donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}, P(Y = n) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_{[X=i]}(Y = n).P(X = i) \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} P_{[X=i]}(Y = n).P(X = i) \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} \binom{i-1}{n} \big(\tfrac{5}{9}\big)^n \big(\tfrac{4}{9}\big)^{i-1-n} \tfrac{10}{19} \big(\tfrac{9}{19}\big)^{i-1} \\
&= \tfrac{10}{19} \big(\tfrac{5}{4}\big)^n \sum_{i=n+1}^{\infty} \binom{i-1}{n} \big(\tfrac{4}{19}\big)^{i-1} \\
&= \tfrac{10}{19} \big(\tfrac{5}{4}\big)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \big(\tfrac{4}{19}\big)^{n+k}
\end{aligned}$$

et, par la formule de l'énoncé :

$$P(Y=n)=\frac{10}{19}\Big(\frac{5}{4}\Big)^n\Big(\frac{4}{19}\Big)^n\frac{1}{(1-\frac{4}{19})^{n+1}}=\frac{10}{19}\Big(\frac{5}{4}\Big)^n\Big(\frac{4}{19}\Big)^n\Big(\frac{19}{15}\Big)^{n+1}$$

Soit : $\forall n\in\mathbb{N}, P(Y=n)=\dfrac{2}{3}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n$ : $Y+1\hookrightarrow\mathcal{G}(2/3)$.

---

**Exercice 4.5.**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1-x}$$

1. Montrer que $g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, calculer $g^{(n)}(x)$ en utilisant $P_n$.

2. Montrer que, pour tout $x$ réel et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{e}^xP_n(-x)+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^x\mathrm{e}^t.t^n\,dt=1$$

3. Déduire de la question précédente le nombre de racines réelles de $P_n$, puis de l'équation $g^{(n)}(x)=0$.

---

**Solution :**

1. $\star$ La fonction $g$ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction écrite au dénominateur n'étant jamais nulle sur le domaine considéré. Ainsi les théorèmes généraux assurent que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\star$ Posons $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $h(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$, on a :

$\rightarrow$ $h'(x)=(1-x)^{-2}$, $h''(x)=2!(1-x)^{-3}$, $\ldots$, $h^{(k)}(x)=k!(1-x)^{-k-1}$

$\rightarrow$ $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$.

Par application de la formule de G. Leibniz, il vient pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et tout $x\neq 1$ :

$$\begin{aligned}g^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)=\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\\&=\frac{n!.\mathrm{e}^x}{(1-x)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{n-k}\end{aligned}$$

Soit :

$$g^{(n)}(x)=\frac{n!.\mathrm{e}^x}{(1-x)^{n+1}}P_n\Big(\frac{1}{1-x}\Big)$$

2. On a, par la formule de B. Taylor avec reste intégral :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t dt$$

Soit en appliquant au point $-x$ :

$$\mathrm{e}^{-x} = P_n(-x) + (-1)^n \int_0^{-x} \frac{(x+t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t dt$$

puis :

$$1 = \mathrm{e}^x P_n(-x) + (-1)^n \int_0^{-x} \frac{(x+t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{x+t} dt$$

et enfin, le changement de variable $x + t = u$ donne :

$$1 = \mathrm{e}^x P_n(-x) - (-1)^n \int_0^x \frac{u^n}{n!}\,\mathrm{e}^u du$$

3. Soit $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^x P_n(-x)$, le calcul précédent montre que $\varphi_n$ est dérivable de dérivée :

$$\varphi_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \times \mathrm{e}^x x^n$$

(Ce que l'on peut voir aussi en dérivant directement $\varphi_n$, ce qui donne ainsi une autre façon de résoudre la question 2.)

En distinguant selon la parité de $n$, on obtient donc les tableaux de variations :

$n$ pair

| $x$ | $-\infty$    $0$    $+\infty$ |
|---|---|
| $\varphi_n'(x)$ | $+$   $0$   $+$ |
| $\varphi_n$ | $0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$ |

$n$ impair

| $x$ | $-\infty$    $0$    $+\infty$ |
|---|---|
| $\varphi_n'(x)$ | $+$   $0$   $-$ |
| $\varphi_n$ | $0 \nearrow 1 \searrow -\infty$ |

(les limites aux bornes du domaine s'obtiennent par les règles de négligeabilité classiques)

Ainsi si $n$ est pair, $\varphi_n$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et il en est de même pour $P_n$, tandis que si $n$ est impair, $\varphi_n$ s'annule une fois et une seule en un point de $\mathbb{R}_+^*$ et donc $P_n$ admet une seule racine dans $\mathbb{R}$ et celle-ci est strictement négative.

---

**Exercice 4.6.**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$ et soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

⟦ On a posé $f^0 = id$ (endomorphisme identité de $E$), $f^1 = f$ et pour tout $p \geqslant 1, f^{p+1}$ est défini par la relation de récurrence $f^{p+1} = f^p \circ f$.⟧

On choisit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\big(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$ forme une base de $E$.

Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $E_i$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille $\big(f^i(a), f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$.

2. Montrer que tous les sous-espaces vectoriels $E_i$ sont stables par $f$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_i, \quad f(x) \in E_i$$

3. Montrer que $E_0 = E$, $E_1 = \mathrm{Im}(f)$ et $E_{n-1} = \mathrm{Ker}(f)$

4. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, non réduit au vecteur nul et stable par $f$. On considère : $I = \{i \in [\![0, n-1]\!] \mid f^i(a) \in F\}$.
Montrer que $n - 1 \in I$.

5. Déterminer tous les sous-espaces stables par $f$.

---

**Solution :**

1. Supposons la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ liée et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires non tous nuls tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a) = 0$.
Notons $i$ le plus petit des indices $k$ pour lesquels $\lambda_k \neq 0$, il reste en fait :

$$\lambda_i f^i(a) + \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k f^k(a) = 0$$

En appliquant $f^{n-i-1}$, il vient alors $\lambda_i f^{n-1}(a) = 0$ (tous les autres termes, s'il y en a, s'évanouissent) et comme $f^{n-1}(a) \neq 0$, on a $\lambda_i = 0$, ce qui contredit la définition de $i$ et prouve la liberté de $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$.
Cette famille contenant $n$ vecteurs de $E$, elle est bien une base de cet espace.

2. On a $f(f^i(a)) = f^{i+1}(a) \in E_i$, $f(f^{i+1}(a)) = f^{i+2}(a) \in E_i$ et ainsi de suite, jusqu'à $f(f^{n-2}(a)) = f^{n-1}(a) \in E_i$ et $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = 0 \in E_i$.
Donc $f$ transforme une base de $E_i$ en une famille de vecteurs de $E_i$ et $E_i$ est bien stable par $f$.

3. $\star$ $E_0 = E$, car $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de $E$.

$\star$ $\mathrm{Im}\, f$ est engendré par les images des vecteurs de la base précédente, donc par les vecteurs $f(a), \dots, f^{n-1}(a)$ et $f^n(a)$. Comme $f^n(a) = 0$, seuls servent les $n-1$ autres vecteurs et $\mathrm{Im}\, f = E_1$.

$\star$ Par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}\, f$ est donc de dimension 1, et comme il contient le vecteur non nul $f^{n-1}(a)$, on a bien $\mathrm{Ker}\, f = E_{n-1}$.

4. Soit $x \neq 0$ dans $F$ ; $x$ s'écrit $x = x_0 a + x_1 f(a) + \cdots + x_{n-1} f^{n-1}(a)$ et si $i$ est le plus petit des indices $k$ pour lesquels $x_k \neq 0$, on a : $x = x_i f^i(a) + \cdots + x_{n-1} f^{n-1}(a)$ et en appliquant $n-1-i$ fois l'endomorphisme $f$, il vient par stabilité de $F$ :

$$x_i f^{n-1}(a) \in F$$

et comme $x_i \neq 0$, on a $f^{n-1}(a) \in F$ et le résultat.

5. Soit $F$ un sous-espace de $E$ stable par $f$ et supposons que $F$ ne soit pas l'un des $E_i$ ni $E_n = \{0\}$.
Comme $\{0\} = E_n \subset E_{n-1} \subset E_{n-2} \subset \cdots \subset E_1 \subset E_0 = E$, il existe un entier $k$ tel que $E_k \subset F \subset E_{k-1}$ et $F$ n'est ni $E_k$ ni $E_{k-1}$.

Il existe donc au moins un vecteur $x = x_{k-1} f^{k-1}(a) + x_k f^k(a) + \cdots + x_{n-1} f^{n-1}(a)$ de $F$ avec $x_{k-1} \neq 0$.
Comme $E_k$ est inclus dans l'espace vectoriel $F$, par différence, $x_{k-1} f^{k-1}(a) \in F$, donc $f^{k-1}(a) \in F$, puis par stabilité de $F$, tous les itérés ultérieurs de $a$ appartiennent à $F$, ce qui prouve que $E_{k-1} \subset F$ et contredit l'hypothèse.
Ainsi les sous-espaces stables par $f$ sont les sous-espaces $E_i, 0 \leqslant i \leqslant n$.

---

**Exercice 4.7.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Soit $f_1$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = [1, +\infty[$.
Montrer que $f_1$ est bijective de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera. Donner alors l'expression de la réciproque $g = f_1^{-1}$ de $f_1$.

2. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0, v_{n+1} = g(v_n)$.
Montrer que si $u_0 > 0$, alors, il existe un entier naturel $p$ tel que $v_p \leqslant u_0 \leqslant v_{p+1}$

3. Montrer que l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramène au cas où $u_0 \in [0, 1]$.

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

**Solution :**

1. Pour $x \geqslant 1$, on a $f_1(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} = \sqrt{x^2 - 1}$.
La fonction $f_1$ est clairement continue strictement croissante et réalise une bijection de $I$ sur $J = f_1(I) = [f_1(1), \lim_{+\infty} f_1[= \mathbb{R}^+$.

$$[y = \sqrt{x^2 - 1}, x \geqslant 1] \iff [y^2 = x^2 - 1, x \geqslant 1, y \geqslant 0] \iff [x^2 = y^2 + 1, y \geqslant 0]$$

$$\iff [x = \sqrt{y^2+1}, y \geqslant 0]$$

Donc $g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(y) = \sqrt{y^2+1}$

2. On a $v_0 = 0$, donc $v_1 = 1$, puis $v_2 = \sqrt{2}$ et clairement $v$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
La croissance de la fonction $g_1$ donne alors la monotonie de $v$ et comme $v_1 > v_0$, la suite $v$ est croissante.
Comme la fonction $g$ n'a pas de point fixe, $v$ n'est pas convergente. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.
Ainsi $([v_n, v_{n+1}[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{R}^+$ et il existe un rang $p$ tel que $v_p \leqslant u_0 < v_{p+1}$.

3. $\star$ Si $u_0 \leqslant 0$, alors $u_1 \geqslant 0$ ;
$\star$ Si $u_0 > 1$, alors $\exists\, p \geqslant 1, v_p \leqslant u_0 \leqslant v_{p+1}$ et, par croissance de $f_1$ (ou $f$) sur $I$ :

$$v_{p-1} = g^{-1}(v_p) = f(v_p) \leqslant u_1 \leqslant f(v_{p+1}) = g^{-1}(v_{p+1}) = v_p$$

Et en faisant ceci $p$ fois : $v_0 \leqslant u_p \leqslant v_1$, soit :

$$0 \leqslant u_p \leqslant 1$$

Dans tous les cas, il existe un rang $p$ pour lequel $0 \leqslant u_p \leqslant 1$.

4. L'équation $f(\ell) = \ell$ a une seule solution : $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, par conséquent :

$\star$ Si $u_0 = \ell$, alors la suite $u$ est constante et converge vers $\ell$.

$\star$ Si $u_0 \in [0,1] \setminus \{1/\sqrt{2}\}$, alors $u_1 = \sqrt{1-u_0^2} \in [0,1]$ et :

$$u_2 = \sqrt{1-u_1^2} = \sqrt{1-(1-u_0^2)} = \sqrt{u_0^2} = u_0$$

Comme on a alors $u_1 \neq u_0$, la suite $u$ est divergente car elle prend alternativement les valeurs $u_0$ et $u_1$.

---

**Exercice 4.8.**

Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas il lance une pièce équilibrée et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_n$ le nombre de marches gravies à l'issue des $n$ premiers pas et $X'_n$ le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des $n$ premiers pas.

a) Déterminer une relation simple liant $X_n$ et $X'_n$. En déduire la loi de $X_n$.

b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de $X_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n$ le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche et $E(Y_n)$ l'espérance de $Y_n$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $Y_n$ ?

b) Déterminer la loi de $Y_1$, puis celle de $Y_2$ et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

c) Montrer que pour tout entier naturel $k$ et tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1)$$

d) Montrer que pour $n \geqslant 3$, $E(Y_n) = \frac{1}{2}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{n-2}) + 1$.

e) On pose $E(Y_n) = v_n + \frac{2}{3}n$. Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)$. En déduire la valeur de l'espérance de $Y_n$.

---

**Solution :**

1. a) On a : $X_n = n + X'_n$ ($n$ pas font $n$ marches, plus une marche à chaque fois que l'on gravit deux marches d'un coup). Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$ et comme $X'_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$ :

$$P(X_n = n + k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) On a évidemment $E(X_n) = n + \frac{n}{2}$ et $V(X_n) = \frac{n}{4}$.

2. a) On a $Y_n(\Omega) = [\![\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, n]\!]$ (pour aller vite on ne fait que des enjambées de deux marches, on peut prendre son temps et monter les marches une par une et toutes les situations intermédiaires sont possibles).

b) $\star$ Comme $Y_1(\Omega) = \{1\}$, on a $Y_1 = 1$ et $E(Y_1) = 1$.

$\star$ De même $Y_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$, et $P(Y_2 = 2) = \frac{1}{2}, P(Y_2 = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi $E(Y_2) = \frac{3}{2}$.

c) Soit $A$ l'événement « le premier pas permet de gravir une marche », et $B$ l'événement « le premier pas permet de gravir deux marches ». La famille $(A, B)$ forme évidemment un système complet d'événements et, pour tout $k$ :

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) &= P_A(Y_n = k)P(A) + P_B(Y_n = k)P(B) \\ &= \frac{1}{2} \times P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2} \times P(Y_{n-2} = k-1) \end{aligned}$$

d) Les variables aléatoires en jeu étant finies, les espérances existent et :

$$\sum_k kP(Y_n = k) = \frac{1}{2}\sum_k kP(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\sum_k kP(Y_{n-2} = k-1)$$

$$= \frac{1}{2}\big(E(Y_{n-1}+1) + E(Y_{n-2}+1)\big)$$
$$= \frac{1}{2}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{n-2}) + 1$$
$$E(Y_n) = 1 + \frac{1}{2}\big(E(Y_{n-1}) + E(Y_{n-2})\big)$$

e) On a donc, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ :
$$v + \frac{2}{3}n = 1 + \frac{1}{2}(v_{n-1} + \frac{2}{3}(n-1) + v_{n-2} + \frac{1}{3}(n-2))$$
Soit :
$$2v_n - v_{n-1} - v_{n-2} = 0$$
L'équation caractéristique de cette relation est $2r^2 - r - 1 = 0$, de racines $-\frac{1}{2}$ et 1.

Donc $v_n$ est de la forme $\alpha + \beta\big(-\frac{1}{2}\big)^n$, et $E(Y_n) = \alpha + \beta\big(-\frac{1}{2}\big)^n + \frac{2n}{3}$

Comme $E(Y_1) = 1$ et $E(Y_2) = \frac{3}{2}$, il vient finalement :
$$E(Y_n) = \frac{2n}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\big(-\frac{1}{2}\big)^n$$