4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Soit α réel et n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique racine positive, qu'on note x_n.

2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ lorsque $\alpha \geq 0$.

3. On suppose que $\alpha > 0$.

a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

b) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \sum \ln(x_n), \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ (avec } \beta \in \mathbb{R}), \sum \big(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\big)$$

Solution :

1. Notons f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + n^\alpha x - 1$.
La fonction f_n est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple parce que f_n est dérivable de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1} + n^\alpha > 0$) et telle que $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n^\alpha > 0$).
Par conséquent f_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}^+$ et on peut même préciser que l'unique solution x_n vérifie $0 < x_n < 1$.

2. $\star$ Si $\alpha > 0$, on écrit $0 < x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n^\alpha} < \dfrac{1}{n^\alpha}$, et comme pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, il vient, par encadrement :

$$\alpha > 0 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$\star$ Pour $\alpha = 0$, on a $f_n(x) = x_n^n + x_n - 1$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1$, on peut écrire : $f_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n - \varepsilon \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\varepsilon < 0$.
Ainsi pour n assez grand, $f_n(1-\varepsilon) < 0$ et $f_n(x_n) = 0$ joint à la croissance de f_n montrent que $x_n > 1 - \varepsilon$.
Ainsi : $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, 1 - \varepsilon < x_n < 1$, ce qui prouve que :

$$\alpha = 0 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

3. a) Pour $\alpha > 0$, on a : $x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n^\alpha}$ et comme $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a *a fortiori* $x_n^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1 - x_n^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et

$$x_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$

b) $\star$ L'équivalent précédent donne, par la règle de Riemann :

$$\sum x_n \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

$\star$ Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x_n) = -\infty$ et :

$$\sum \ln(x_n) \text{ diverge très grossièrement}$$

$\star$ • Si $\beta \leqslant 0$, x_n^β ne tend pas vers 0, donc $\ln(1 + x_n^\beta)$ non plus et :

$$\beta \leqslant 0 \implies \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ diverge grossièrement}$$

• Si $\beta > 0$, x_n^β tend vers 0 et $\ln(1+x_n^\beta) \underset{(n\to\infty)}{\sim} x_n^\beta \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha\beta}}$ et, à nouveau par la règle de Riemann :

$$\beta > 0 \implies \sum \ln(1 + x_n^\beta) \text{ converge} \iff \alpha\beta > 1$$

$\star$ $x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n^\alpha}$, donc $x_n < \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $0 < \dfrac{1}{n^\alpha} - x_n = \dfrac{x_n^n}{n^\alpha} \leqslant x_n^n < \dfrac{1}{n^{\alpha n}}$
Or, pour n assez grand, $\alpha n > 2$ et donc, à partir d'un certain rang : $0 < \dfrac{1}{n^\alpha} - x_n < \dfrac{1}{n^2}$ et par la règle de Riemann :

$$\alpha > 0 \implies \sum\left(\frac{1}{n^\alpha} - x_n\right) \text{ converge et } \sum\left(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ aussi}$$

Exercice 4.2.

Soit a un réel fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

2. Calculer l'espérance de X.

3. On désigne par F la fonction de répartition de X. Déterminer un réel m tel que $F(m) = 1/2$.

4. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Solution :

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, et admet en ce point une limite à gauche et une limite à droite.
De plus pour $A > a$, on a :

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\, dx = \int_{a}^{A} e^{-(x-a)}\, dx = \Big[-e^{-(x-a)} \Big]_a^A = 1 - e^{-(A-a)} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi f possède toutes les propriétés requises pour être une densité de probabilité.

2. Toujours pour $A > a$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{A} x f(x)\, dx &= \int_{a}^{A} x.e^{-(x-a)}\, dx = \Big[-x.e^{-(x-a)} \Big]_a^A + \int_{a}^{A} e^{-(x-a)}\, dx \\ &= a + 1 - e^{-(A-a)} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} a + 1 \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge (absolument), donc X admet une espérance, avec :

$$E(X) = a + 1$$

(on aurait pu se contenter de remarquer que $X - a$ suit la loi exponentielle de paramètre 1)

3. On a vu au cours de la question 1. que la fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant a\\ 1-\mathrm{e}^{-(x-a)} & \text{si } x\geq a\end{cases}$$

Par conséquent : $F(x)=\dfrac{1}{2}\iff \mathrm{e}^{-(x-a)}=\dfrac{1}{2}$ et :

$$m=a+\ln 2$$

4. a) Y prend encore ses valeurs dans $[a,+\infty[$ et pour $x\geq a$:

$1-F_Y(x)=P(Y>x)=P((X_1>x)\cap\cdots\cap(X_n>x))$

Les variables X_k étant indépendantes et suivant toutes la loi de X, il vient donc :

$1-F_Y(x)=[P(X>x)]^n=[\mathrm{e}^{-(x-a)}]^n=\mathrm{e}^{-n(x-a)}$.

Donc $F_Y(x)=1-\mathrm{e}^{-n(x-a)}$ et Y est une variable à densité, dont une densité f_Y est définie par :

$$f_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ n.\mathrm{e}^{-n(x-a)} & \text{si } x\geq a\end{cases}$$

b) Les convergences étant claires, on a :

$\star$ $E(Y)=\displaystyle\int_a^{+\infty} nx.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\,dx=\big[-x.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\big]_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-n(x-a)}\,dx$

soit :

$$E(Y)=a+\big[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n(x-a)}\big]_a^{+\infty}=a+\frac{1}{n}$$

$\star$ $E(Y^2)=\displaystyle\int_a^{+\infty} nx^2.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\,dx=\big[-x^2.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\big]_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}x.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\,dx$

Ainsi : $E(Y^2)=a^2+\dfrac{2}{n}E(Y)=a^2+\dfrac{2a}{n}+\dfrac{2}{n^2}$, puis :

$$V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{n^2}$$

(on aurait aussi pu se contenter de dire que la variable aléatoire $Y-a$ suit la loi exponentielle de paramètre n)

Exercice 4.3.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=1,\forall\, n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\ln(1+u_n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est la limite de cette suite ?

2. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n\geq\dfrac{1}{n+1}$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Montrer que la quantité $S_{2n} - S_n$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire pour la suite (S_n) ?

3. a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$ on a : $\ln\bigl(1 + \frac{3}{x}\bigr) < \frac{3}{x+1}$ et en déduire que, pour $n \geq 1$, on a : $u_n \leqslant \frac{3}{n+1}$.

b) Vérifier que, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\cdot$ En déduire que la suite (σ_n) définie pour $n \geq 1$ par : $\sigma_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$ est convergente.

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = \frac{1}{2}$ et retrouver ainsi la convergence de la suite (σ_n).

Solution :

1. La suite est à termes positifs (récurrence simple) et comme $\ln(1+x) \leqslant x$, avec égalité seulement pour $x = 0$, la suite est décroissante.
Ainsi cette suite converge et sa limite est le seul point fixe de f, à savoir 0 :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

2. a) La propriété demandée est vraie au rang 0 et si on suppose qu'elle est vraie à un certain rang $n-1$, alors :

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1}) \geq \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{n+1}$$

Ce qui prouve que la propriété est encore vraie au rang n et donne la conclusion par le principe de récurrence.

b) Ainsi :

$$S_{2n} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} \geq \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$$
$$\geq n \times \frac{1}{2n+1}$$

Le minorant exhibé a pour limite 1/2 lorsque n tend vers l'infini. Il est donc impossible d'avoir $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ et la suite (S_n) ne peut converger. Comme cette suite est croissante, on peut préciser :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

3. a) $\star$ $\varphi : x \mapsto \ln(1 + \frac{3}{x}) - \frac{3}{x+1}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ telle que :

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} + \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3(x-1)}{x(x+3)(x+1)^2} \geq 0$$

La fonction φ est donc (strictement) croissante sur $[1, +\infty[$ et comme elle est de limite nulle en $+\infty$, elle est strictement négative sur $[1, +\infty[$.

$\star$ On a $u_1 = \ln 2 \simeq 0{,}6931 \leqslant \dfrac{3}{2}$, et si on suppose la propriété vraie pour un certain rang $n-1$, alors :

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1}) \leqslant \ln(1 + \frac{3}{n}) < \frac{3}{n+1}$$

On conclut encore par le principe de récurrence.

b) $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, et alors :

$$\begin{aligned}\sigma_n &\leqslant 9\big(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\big) \leqslant 9\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\big)\\ &\leqslant 9\big(1 - \frac{1}{n+1}\big) \leqslant 9\end{aligned}$$

La suite (σ_n) qui est croissante, est majorée, donc est convergente.

4. a) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\ln(1+u_n)} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n \ln(1+u_n)}$ et comme u_n a pour limite 0 un développement limité du logarithme donne :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - u_n + u_n^2/2 + o(u_n^2)}{u_n(u_n + o(u_n))} = \frac{1}{2} + o(1)$$

soit :

$$\lim_{n\to\infty} (v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}$$

b) L'exercice classique de Cesàro montre, par retour aux «epsilon» que si une suite w converge vers 0, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}}{n} = 0$.

On a ici $w_n = v_{n+1} - v_n - \dfrac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{v_n - v_0 - \frac{n}{2}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = \frac{1}{2},\ i.e.\ v_n \sim \frac{n}{2}$$

Par conséquent $u_n \sim \dfrac{2}{n}$ et $u_n^2 \sim \dfrac{4}{n^2}$, qui est le terme général d'une série à termes positifs convergente. La conclusion résulte de la règle d'équivalence.

Exercice 4.4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est N définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la lettre utilisée montre la formation de cette matrice ...)

1. Déterminer le rang de N puis celui de $N - I$. En déduire que 0 et 1 sont des valeurs propres de N.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ induit un endomorphisme $\widetilde{f}$ de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base trouvée dans la question précédente ?

4. En déduire que 2 est une valeur propre de f, puis déterminer un vecteur propre associé.

5. En déduire que N est diagonalisable.

Solution :

1. $\star$ Les $n-1$ premières colonnes de N forment une famille échelonnée, donc libre, tandis que la dernière colonne est égale à la première, donc :

$$\mathrm{rg}(N) = n - 1$$

$\star$ La première et la dernière colonne de $N - I$ forment une famille libre (positions des 0), tandis que toutes les autres sont nulles, donc :

$$\mathrm{rg}(N - I) = 2$$

N et $N - I$ ne sont pas inversibles, donc 0 et 1 sont valeurs propres de N.

2. Soit $s = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, en regardant encore les colonnes de N, on voit que la famille $\mathcal{C} = (s, e_2, \ldots, e_{n-1})$ est une famille libre qui engendre $\mathrm{Im}\, f$, donc est une base de cet espace.

3. On a $f(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$, donc la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ induit un endomorphisme $\widetilde{f}$ de $\mathrm{Im}\, f$.
On a :

$\widetilde{f}(e_2) = f(e_2) = e_2$, $\widetilde{f}(e_3) = e_3$, $\ldots$, $\widetilde{f}(e_{n-1}) = e_{n-1}$,

$\widetilde{f}(s) = f(e_1) + f(e_2) + \cdots + f(e_{n-1}) + f(e_n) = s + e_2 + \cdots + e_{n-1} + s$

Donc : $\widetilde{f}(s) = 2s + e_2 + \cdots + e_{n-1}$ et :

$$\widetilde{N} = M_{\mathcal{C}}(\widetilde{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $\widetilde{N}$ est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres sont en évidence et $2 \in \mathrm{Spec}(\widetilde{f})$, ainsi il existe x non nul dans $\mathrm{Im}\, f$, tel que $f(x) = \widetilde{f}(x) = 2x$, et :

$$2 \text{ est valeur propre de } f.$$

Toujours en regardant $\widetilde{N}$, on voit que :

$$f(s + e_2 + \cdots + e_{n-1}) = \widetilde{f}(s + e_2 + \cdots + e_{n-1}) = 2(s + e_2 + \cdots + e_{n-1})$$

5. Faisons le bilan :
$\rightarrow$ 1 est valeur propre de N et $\dim E_{(1)}(N) = n - \mathrm{rg}(N - I) = n - 2$;
$\rightarrow$ 0 est valeur propre de N et $\dim E_{(0)}(N) = \dim \mathrm{Ker}\, N = 1$;
$\rightarrow$ 2 est valeur propre de N et $\dim E_{(2)}(N) \geq 1$.
Ainsi, comme des sous-espaces propres sont toujours en somme directe, $\dim E_{(2)}(N)$ vaut nécessairement 1 et la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, soit :

$$N \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 4.5.

Soit k un entier naturel tel que $k \geq 2$.

Soit Q le polynôme défini par

$$Q(X) = \sum_{n=1}^{k-1} \Big(\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \Big) X^n$$

1. a) Montrer que $Q(X) = (1 - X)^{k-1} - 1$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer la loi de S_2 et la loi de S_3.

b) Déterminer par récurrence la loi de S_n.

c) Calculer les probabilités suivantes :

$P(X_1 = X_2), P(X_1 < X_2), P(X_1 > X_2)$.

Solution :

1. a) On a $\sum_{n=1}^{k-1}\sum_{j=n}^{k-1}\dots = \sum_{1\le n\le j\le k-1}\dots = \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{j}\dots$, donc pour tout x réel non nul :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}x^n = x\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{p=0}^{j-1}\binom{j-1}{p}x^p$$

$$Q(x) = x\sum_{j=1}^{k-1}(1+x)^{j-1} = x\,\frac{1-(1+x)^{k-1}}{1-(1+x)} = (1+x)^{k-1}-1$$

Q et $(1+X)^{k-1}-1$ concident en une infinité de points, donc sont égaux :

$$Q(X) = (1+X)^{k-1}-1$$

b) Or $(1+X)^{k-1}-1 = \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k-1}{j}X^j$, donc en comparant avec la forme initiale :

$$\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} = \binom{k-1}{n} \text{ (formule de Pascal itérée)}$$

2. a) $\star$ $S_2(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$ et pour $k\ge 2$, $(S_2 = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1}((X_1 = j)\cap(X_2 = k-j))$
d'où, par indépendance :

$$P(S_2 = k) = \sum_{j=1}^{k-1}P(X_1 = j)P(X_2 = k-j) = \sum_{j=1}^{k-1}pq^{j-1}pq^{k-j-1}$$

$$P(S_2 = k) = \sum_{j=1}^{k-1}p^2q^{k-2} = (k-1)p^2q^{k-2}$$

$\star$ De même $S_3(\Omega) = [\![3,+\infty[\![$ et pour $k\ge 3$, comme X_3 est indépendante de $S_2 = X_1 + X_2$:

$$P(S_3 = k) = \sum_{j=2}^{k-1}P((S_2 = j)\cap(X_3 = k-j)) = \sum_{j=2}^{k-1}(j-1)p^2q^{j-2}pq^{k-j-1}$$

$$= \sum_{j=2}^{k-1}(j-1)p^3q^{k-3} = p^3q^{k-3}\times\frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

b) On a : $P(S_2 = k) = \binom{k-1}{1} p^2 q^{k-2}$ et $P(S_3 = k) = \binom{k-2}{2} p^3 q^{k-3}$.

On peut donc penser que l'on a :

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}, \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } k \geq n.$$

Cette formule est aussi valide pour $n = 1$ et si on la suppose vraie pour un rang n, on peut écrire, pour $k \geq n + 1$:

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n} p q^{k-j-1} = p^{n+1} q^{k-(n+1)} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}$$
$$= \binom{k-1}{n} p^{n+1} q^{k-(n+1)}$$

Ce qui prouve que la formule est encore valide au rang $n+1$. On conclut par le principe de récurrence.

c) $\star$ $P(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 = i)P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{\infty} p^2 (q^2)^{i-1}$, avec $q = 1 - p$, donc :

$$P(X_1 = X_2) = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}$$

Par symétrie $P(X_1 < X_2) = P(X_2 < X_1)$ et comme le tour des possibles est fait :

$$P(X_1 < X_2) = P(X_2 < X_1) = \frac{1}{2}(1 - P(X_1 = X_2)) = \frac{q}{2 - p}$$

Exercice 4.6.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$.

1. a) Soit $S_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de S_n, puis une densité de cette variable aléatoire. Calculer l'espérance $E(S_n)$ de S_n.

b) Montrer que la variance $V(S_n)$ de S_n est égale à $\dfrac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$.

(On pourra utiliser une variable aléatoire U de densité égale à nx^{n-1} sur $[0, 1[$ et nulle ailleurs, ainsi que la variable aléatoire $a + (b - a)U$).

S_n est-il un estimateur sans biais de b ?

2. On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer l'espérance de I_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$. On admettra que $V(S_n) = V(I_n)$.

I_n est-il un estimateur sans biais de a ?

3. Exprimer a et b en fonction de $E(S_n)$ et $E(I_n)$; en déduire des estimateurs sans biais de a et b.

Solution :

1. a) S_n prend ses valeurs entre a et b et pour $x \in [a, b]$, on a par indépendance :

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leqslant x) = P((X_1 \leqslant x) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant x))$$
$$= P(X_1 \leqslant x) \times \cdots \times P(X_n \leqslant x) = F_X(x)^n$$

où F_X désigne la fonction de répartition d'une variable suivant la loi uniforme sur le segment $[a, b]$.
Ainsi :

$$\forall\, x \in [a, b], F_{S_n}(x) = \big(\frac{x-a}{b-a}\big)^n$$

Par dérivation, on peut choisir pour densité f_{S_n} de S_n, la fonction définie par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{b-a}\big(\dfrac{x-a}{b-a}\big)^{n-1} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $x = x - a + a$, on peut écrire :

$$E(S_n) = \int_a^b x f_{S_n}(x)\, dx = \frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b ((x-a)^n + a(x-a)^{n-1})\, dx$$
$$= \frac{n}{(b-a)^n}\big(\frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1} + \frac{a}{n}(b-a)^n\big)$$
$$E(S_n) = a + \frac{n}{n+1}(b-a) = \frac{a+nb}{n+1}$$

(on aurait pu calculer directement $E(S_n - a)$).

b) De même :

$$E((S_n - a)^2) = \frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b (x-a)^2(x-a)^{n-1}dx = \frac{n}{n+2}(b-a)^2$$

Donc :
$$V(S_n) = V(S_n - a) = E((S_n-a)^2) - E(S_n-a)^2 = \big[\frac{n}{n+2} - \big(\frac{n}{n+1}\big)^2\big](b-a)^2$$

Soit :

$$V(S_n) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}(b-a)^2$$

On a $E(S_n) \neq b$, mais $E(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ et $V(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite (S_n) est asymptotiquement sans biais et convergente.

2. I_n prend aussi ses valeurs entre a et b et pour $x \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned}1 - F_{I_n}(x) &= P(I_n > x) = P((X_1 > x) \cap \cdots \cap (X_n > x))\\ &= [P(X > x)]^n = [1 - F_X(x)]^n = \big(1 - \frac{x-a}{b-a}\big)^n\end{aligned}$$

Donc :

$$F_{I_n}(x) = 1 - \big(\frac{b-x}{b-a}\big)^n$$

une densité sur $[a, b]$ de I_n est donc :

$$f_{I_n}(x) = \frac{n}{b-a}\big(\frac{b-x}{b-a}\big)^{n-1}$$

Ainsi $E(b - I_n) = \dfrac{n}{(b-a)^n}\displaystyle\int_a^b (b-x)^n\,dx = \dfrac{n}{n+1}(b-a)$, et :

$$E(I_n) = b - \frac{n}{n+1}(b-a) = \frac{b+na}{n+1}$$

(On aurait pu considérer les variables $-X_1, -X_2, \dots, -X_n$ qui suivent la loi uniforme sur $[-b, -a]$ et sont indépendantes et remarquer que $\inf(X_1, \dots, X_n)$ n'est autre que $-\sup(-X_1, \dots, -X_n)$, ...).

On a $E(I_n) \neq a$, mais $E(I_n)$ a pour limite a, tandis que $V(I_n)$ est de limite nulle. Ainsi la suite (I_n) est asymptotiquement sans biais et convergente.

3. Des calculs simples donnent :

$$a = \frac{n.E(I_n) - E(S_n)}{n-1} \text{ et } b = \frac{n.E(S_n) - E(I_n)}{n-1}$$

Ainsi $\dfrac{nI_n - S_n}{n-1}$ et $\dfrac{nS_n - I_n}{n-1}$ sont des estimateurs sans biais respectifs de a et b.

Exercice 4.7.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,n dx$ est convergente.

On pose alors : $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,n dx$.

2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. Montrer qu'il existe un réel k_n, que l'on déterminera, tel que $\varphi_n = k_n f_n$ soit une densité de probabilité.
On note X_n une variable aléatoire admettant φ_n comme densité.

4. Pour quelles valeurs de n, X_n admet-elle une espérance ? Calculer alors cette espérance.

5. Pour quelles valeurs de n, X_n admet-elle une variance ? Calculer alors cette variance.

Solution :

1. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |x|^{3/2} f_n(x) = 0$. Deux applications de la règle de Riemann montrent que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ convergent et on conclut par application de la relation de Chasles.
Notons d'ailleurs que par parité on a $I_n = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

2. $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \implies u'(t) = -\dfrac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$, $v'(t) = 1 \Longleftarrow v(t) = t$.
On a $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t)v(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, ce qui permet de procéder à cette intégration par parties directement avec les bornes infinies, d'où :

$$I_n = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = 2n(I_n - I_{n+1})$$

On a donc $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\, I_n$ et, en redescendant :

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2}\, I_1$$

Or $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \big[\operatorname{Arc\,tan} t\big]_{\to-\infty}^{\to+\infty} = \pi$, donc en remplaant et en achevant le calcul, en multipliant haut et bas par $2n \times (2n-2) \times \ldots \times (2)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\pi$$

3. f_n est positive, continue sur $\mathbb{R}$ d'intégrale sur $\mathbb{R}$ convergente valant I_n.
Ainsi pour $k_n = \dfrac{1}{I_n}$, la fonction $\varphi_n = \dfrac{1}{I_n} f_n$ vérifie les conditions exigées pour être une densité de probabilité.

4. Sous réserve de convergence, on a $E(X_n) = k_n \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_n(t)\,dt$.

La règle de Riemann assure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_n(t)\,dt$ converge si et seulement si $n \geq 2$, et dans ce cas, (par imparité), l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 tf_n(t)\,dt$ est également (absolument) convergente.
L'utilisation de l'imparité donne alors la nullité de l'intégrale sur $\mathbb{R}$, soit :

$$\forall\, n \geq 2, E(X_n) \text{ existe et vaut } 0$$

5. Pour que la variance existe, il faut déjà que l'espérance existe. On suppose donc $n \geq 2$ et comme l'espérance est nulle, on a sous réserve de convergence :

$$V(X_n) = E(X_n^2) = k_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = k_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

Donc la variance existe bien, avec :

$$V(X_n) = k_n(I_{n-1} - I_n) = \frac{1}{I_n}(I_{n-1} - I_n) = \frac{I_{n-1}}{I_n} - 1 = \frac{2n-2}{2n-3} - 1$$

$$\forall\, n \geq 2, V(X_n) = \frac{1}{2n-3}$$

Exercice 4.8.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $g(t,x) = \dfrac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$, et $u_n(x) = g(n,x)$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

Pour les x réels pour lesquels cette série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

2. On pose maintenant, pour $x > 0$,

$$I_1(x) = \int_1^{+\infty} g(t,x)\,dt \text{ et } I_2(x) = \int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt.$$

Montrer que ces deux intégrales sont convergentes puis calculer leur valeur.

3. Montrer que $I_1(x) \leq S(x) \leq I_2(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$.

Solution :

1. Le réel $u_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$ est positif pour $x > 0$ (et négatif pour $x < 0$).

De plus, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $u_n(x) \sim \dfrac{1}{x.n^{3/2}}$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum u_n(x)$ (règle de Riemann).

2. On a $I_1(x) = x\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$. Cette intégrale est impropre en $+\infty$.
Comme, au voisinage de $+\infty$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+tx^2)} \sim \dfrac{1}{x^2.t^{3/2}}$, la règle de Riemann prouve encore que l'intégrale définissant $I_1(x)$ est convergente.

De même $I_2(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$ est impropre en 0 et $+\infty$.
→ Le problème pour la borne infinie a été réglé ci-dessus.
→ Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+tx^2)} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et la règle de Rieman montre que l'intégrale définissant $I_2(x)$ est aussi convergente pour la borne 0. On conclut par application de la formule de Chasles.

Pour calculer $I_1(x)$, on pose, pour $a > 1$:

$$I_1(x,a) = x\int_1^a \frac{dt}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$$

Le changement de variable $u = x\sqrt{t}$ de classe C^1 sur $[1,a]$ permet d'obtenir :

$$I_1(x,a) = 2\int_x^{x\sqrt{a}} \frac{du}{1+u^2} = 2(\arctan(x\sqrt{a}) - \arctan x)$$

puis, en faisant tendre a vers $+\infty$, il vient :

$$I_1(x) = 2\big(\frac{\pi}{2} - \arctan x\big)$$

On remarque que $I_2(x) = I_1(x) + \displaystyle\int_0^1 \frac{xdt}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$.

Soit $b \in]0,1]$. On a :

$$\int_b^1 \frac{xdt}{\sqrt{t}(1+tx^2)} = 2\int_{x\sqrt{b}}^{x} \frac{du}{1+u^2} = 2(\arctan x - \arctan x\sqrt{b})$$

On fait tendre ensuite b vers 0 et il vient :

$$\int_0^1 \frac{xdt}{\sqrt{t}(1+tx^2)} = 2\arctan x \text{ et } I_2(x) = \pi$$

3. Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto g(t,x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc si $t \in [n, n+1]$, on a :

$$u_{n+1}(x) \leq g(t,x) \leq u_n(x), \text{ soit } u_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1} g(t,x)\,dt \leq u_n(x)$$

puis en sommant ces inégalités pour $n \geq 1$:

$$S(x) - u_1(x) \leq I_1(x) \leq S(x).$$

Or $u_1(x) \leq \displaystyle\int_0^1 g(t,x)\,dt$. Donc $I_1(x) \leq S(x) \leq I_2(x)$. Il reste à prendre la limite pour $x \to 0^+$ pour obtenir :

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = \pi.$$

Exercice 4.9.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

→ pour tout i de $[\![2, n-1]\!], u(e_i) = e_n$;
→ $u(e_1) = u(e_n) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

1. a) Déterminer le rang de u, ainsi qu'une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Im} u$.

b) En déduire que 0 est valeur propre de u. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 ainsi qu'une base de ce sous-espace.

2. On note $\widetilde{u}$ la restriction de u à $\operatorname{Im} u$.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im} u$.

b) En déduire que $\widetilde{u}$ peut être considéré comme un endomorphisme de $\operatorname{Im} u$.

c) Ecrire la matrice de $\widetilde{u}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. a) Soit λ une valeur propre non nulle de u et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\operatorname{Im} u$.

b) En déduire les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) Immédiatement :

$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \operatorname{Vect}(u(e_2), u(e_1)) = \operatorname{Vect}\big(\sum_{i=1}^{n} e_i, e_n\big).$

Ces deux derniers vecteurs forment une famille libre. C'est donc une base de l'image de u et u est de rang 2.

b) Par le théorème du rang, le noyau $\operatorname{Ker} u$ est de dimension $n-2$.
Ainsi 0 est valeur propre de u (car $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$) et par définition de u, les équations $u(e_2) = u(e_3) = \cdots = u(e_{n-1}), u(e_1) = u(e_n)$, entraînent que les $(n-2)$ vecteurs $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \ldots, e_2, -e_{n-1}, e_1 - e_n)$ sont dans le noyau de u.
On vérifie aisément, par échelonnement, qu'ils forment une famille libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$.

2. a) Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $u^2(x) = u(u(x)) \in \operatorname{Im} u$. Donc $\operatorname{Im}(u^2) \subseteq \operatorname{Im}(u)$.

b) Par définition $\widetilde{u} : \operatorname{Im} u \to \operatorname{Im}(u^2) \subseteq \operatorname{Im}(u)$. Comme $\widetilde{u}$ est linéaire, on peut considérer que $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u)$.

c) Dans la base $\mathcal{B}$ trouvée dans la question 1, on a :

$$\widetilde{u}\big(\sum_{i=1}^{n} e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} u(e_i) = 2\sum_{i=1}^{n} e_i + (n-2)e_n$$

et

$$\widetilde{u}(e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

La matrice demandée est donc : $\widetilde{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) On sait que $u(x) = \lambda x$ et $\lambda \neq 0$, d'où $x = \dfrac{u(x)}{\lambda} \in \operatorname{Im}(u)$. Donc on a $\widetilde{u}(x) = \lambda x$.

b) En écrivant x sous la forme $\alpha \sum_{i=1}^{n} e_i + \beta e_n$, puis $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, le système $\widetilde{U}X = \lambda X$ donne

$$\begin{cases} (2-\lambda)\alpha + \beta = 0 \\ (n-2)\alpha - \lambda\beta = 0 \end{cases}$$

L'hypothèse $\alpha = 0$ entraîne que $\beta = 0$, donc $x = 0$, ce qui est exclu.
Ainsi, comme $\alpha \neq 0$, λ vérifie la relation $\lambda^2 - 2\lambda - n + 2 = 0$. Cette équation ayant deux racines distinctes, il vient :

- $\lambda = 1 + \sqrt{n-1}$, d'où $\alpha = 1 - \sqrt{n+1}, \beta = n-2$. Le sous-espace propre associé est de dimension 1.
- $\lambda = 1 - \sqrt{n-1}$, d'où $\alpha = 1 + \sqrt{n+1}, \beta = n-2$. Le sous-espace propre associé est de dimension 1.

En conclusion, l'endomorphisme u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Exercice 4.10.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$ est une densité de probabilité.
On note Y une variable aléatoire admettant g pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition G de Y.

3. Soit a réel appartenant à $[1/2, 1]$ et soit f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 2(1-a)g(x) & \text{si } x < 0 \\ 2ag(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f_a est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit X_a une variable aléatoire de densité f_a.

b) Déterminer la fonction de répartition F_a de X_a.

c) Montrer que la variable aléatoire $Y_a = |X_a|$ est une variable aléatoire à densité, dont la loi de probabilité est indépendante de a. Reconnaître cette loi.

4. On note $Z_a = \lfloor X_a \rfloor$ la partie entière de Y_a.

a) Déterminer $Z_a(\Omega)$.

b) Déterminer la loi de Z_a. Calculer son espérance et sa variance.

Solution :

1. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, positive et, clairement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1$$

2. Pour tout x réel, $G(x) = P(Y \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$.

D'où, en distinguant selon le signe de x :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. a) On a :

$$f_a(x) = \begin{cases} (1-a)\mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ a.\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Comme $a \in]0,1[$, la fonction f_a est clairement positive. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx = (1-a)\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\,dx + a\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{1}{2}(1-a) + \frac{1}{2}\,a = 1$$

b) Pour tout x réel, $F_a(x) = P(X_a \leq x)$. Donc

- si $x < 0$, $F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} (1-a)\mathrm{e}^t\,dt = (1-a)\mathrm{e}^x$.
- si $x \geq 0$, $F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} (1-a)\mathrm{e}^t\,dt + \int_0^x a.\mathrm{e}^{-t}\,dt = 1 - a.\mathrm{e}^{-x}$.

c) Ainsi, pour tout réel x :

$$P(Y_a \leq x) = P(|X_a| \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_a(x) - F_a(-x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La variable aléatoire Y_a suit une loi exponentielle de paramètre 1.

4. a) On a $Z_a(\Omega) = \mathbb{N}$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(Z_a = k) &= P(\lfloor Y_a \rfloor = k) = P(k \leq Y_a < k+1) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)} \\ &= \big(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\big)\mathrm{e}^{-k} \end{aligned}$$

Donc $Z_a + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $(1 - 1/\mathrm{e})$, et :

$$E(Z_a) = \frac{1}{\mathrm{e}-1} \text{ et } V(Z_a) = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.$$

Exercice 4.11.

1. Pour n entier tel que $n \geq 2$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leq -n \\ \mathrm{e}^x - \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n & \text{si } x > -n \end{cases}$$

Étudier les variations de la fonction f_n.

2. a) Montrer que f_n admet un maximum en un point noté x_n qui appartient à l'intervalle $]-n, 0[$.

b) En étudiant la fonction φ_n définie sur $[-n, 0]$ par :

$$\varphi_n(x) = \frac{x}{n-1} - \ln\big(1 + \frac{x}{n}\big)$$

montrer que $x_n \in]-2, -1[$.

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

Solution :

1. a) $\star$ Sur l'intervalle $]-\infty,-n]$, la fonction f_n est clairement croissante.

$\star$ Sur l'intervalle $]-n,+\infty[$, on a $f_n'(x)=\mathrm{e}^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$.

On a donc sur cet intervalle :

$$f_n'(x)\geq 0\iff \mathrm{e}^x\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\iff x\geq(n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

Soit alors $g_n:]-n,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto x-(n-1)\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

La fonction g_n est dérivable sur le domaine considéré, avec :

$$g_n'(x)=1-\frac{n-1}{x+n}=\frac{x+1}{x+n}$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-n$		-1		0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
g_n	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il existe donc x_n négatif tel que $f_n'(x)$ est négatif pour x compris entre x_n et 0, d'où le tableau des variations de f_n :

x	$-\infty$		x_n		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Presque tout a été dit dans l'étude de la première question. Il suffit de dire en plus que $-n<x_n<0$.

b) On remarque que $\varphi_n(x_n)=\dfrac{1}{n-1}g_n(x)$.

Comme $\varphi_n(-2)=\dfrac{-2}{n-1}-\ln\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$, on fait une étude rapide sur $[2,+\infty[$ de :

$$\psi:x\mapsto\frac{-2}{x-1}-\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)$$

On a $\psi'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2x(x-2)}<0$, donc ψ décroît sur le domaine considéré, et comme $\lim\limits_{+\infty}\psi=0$, ψ est positive, soit $\varphi_n(-2)>0$, $g_n(-2)>0$ et $-2<x_n<-1$.

3. Comme la suite (x_n) est bornée, on a :

$$\frac{x_n}{n-1} = \ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o(n^{-2}).$$

Donc :

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = -\frac{x_n}{2n^2} + o(n^{-2})$$

Soit :

$$x_n = -\frac{2n}{n-1} + o(1) \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} x_n = -2$$

Exercice 4.12.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(c_{i,j})$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, définis par

$$\forall\, i \in [\![1, n-1]\!], c_{i,i+1} = 1; \forall\, j \in [\![1,n]\!], c_{n,j} = -a_j; c_{i,j} = 0, \text{ sinon.}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer le rang de C. Préciser le noyau de f.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que C soit inversible. Sous cette condition, expliciter la matrice C^{-1}.

3. Montrer que les valeurs propres de C sont racines d'un polynôme P de degré n, dont on précisera les coefficients.

4. Dans cette question, on considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

a) Déterminer les valeurs propres de M.

b) Étudier si la matrice M est diagonalisable.

Solution :

1. On résout $CX = 0$, soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_2 & = 0 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i\,x_i & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & = 0 \\ a_1\,x_1 & = 0 \end{cases}$$

• Si $a_1 \neq 0$, $X = 0$ et $\operatorname{rg} C = n$, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

• Si $a_1 = 0$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, 0, \dots, 0)$, de dimension 1, donc $\operatorname{rg} C = n - 1$.

2. Ainsi la matrice C est inversible si et seulement si $a_1 \neq 0$ et pour calculer alors C^{-1}, on résout $CX = Y$, soit :

$$\begin{cases} x_2 = y_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n = y_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = y_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n = y_{n-1} \\ x_1 = -\dfrac{1}{a_1}\Big[\sum_{i=2}^{n} a_i x_i + y_n\Big] = \sum_{i=2}^{n} -\dfrac{a_i}{a_1} x_i - \dfrac{1}{a_1} y_n \end{cases}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_2}{a_1} & -\dfrac{a_3}{a_1} & \cdots & -\dfrac{a_n}{a_1} & -\dfrac{1}{a_1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. De même, on résout $CX = \lambda X$ et on cherche pour quelles valeurs de λ on peut trouver une solution qui soit une colonne non nulle :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{i-1} x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Si $x_1 = 0$, alors $X = 0$, ce qui est exclu, donc

$$\lambda \text{ est racine de } P(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}$$

4. Les valeurs propres sont parmi les racines de

$$P(X) = X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 14X - 8 = (X-1)^2(X+2)(X-4)$$

La matrice M a au plus 3 valeurs propres, chacune associée à un sous-espace propre de dimension 1 d'après le système ci-dessus, donc la matrice M n'est pas diagonalisable.