4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Deux joueurs A et B jouent à un jeu consistant en une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie.
Le joueur A a la probabilité p de gagner en obtenant «Pile» et B a la probabilité $q = 1 - p$ de gagner en obtenant «Face».
Le joueur qui gagne la partie est celui qui a, pour la première fois, deux victoires de plus que l'autre.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité pour qu'au $n^{\text{ème}}$ coup, les deux joueurs soient à égalité ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité pour qu'au $n^{\text{ème}}$ coup A gagne la partie ?

3. Quelle est la probabilité que A gagne la partie ?

4. Quelle est la probabilité que la partie ne s'arrête pas ?

5. Soit X le nombre aléatoire de lancers effectués jusqu'à l'obtention d'un gagnant.

   a) Quelle est la loi de X ?

   b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.

Solution :

1. Notons E_n l'événement : «à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer les deux joueurs sont à égalité».

- Clairement, si n est impair, on a $P(E_n) = 0$.
- Si n est pair, notons $n = 2k$, avec $k \geqslant 1$.

$\star$ L'événement E_2 est réalisé si A gagne l'une des deux premières manches et B gagne l'autre, d'où $P(E_2) = 2pq$.

$\star$ Pour $k > 1$, réaliser E_{2k}, c'est obtenir l'égalité au bout des 2 premières manches, puis à nouveau égalité au bout des 4 premières manches et ainsi de suite jusqu'à la $(2k)^{\text{ème}}$ manche. Cela signifie que pour chaque tranche « $(2i-1, 2i)$ », $1 \leqslant i \leqslant k$, l'un gagne une manche et l'autre l'autre ! Soit par indépendance des résultats des différentes tranches jouées :

$$P(E_{2k}) = (2pq)^k$$

Le résultat obtenu est donc valide pour $k = 1$.

2. Notons AG_n l'événement « A gagne à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ manche ». Il est clair que si n est impair AG_n est impossible, tandis que AG_{2k} est réalisé lorsque l'on a égalité au rang $2k-2$, A gagnant alors les manches de rangs $2k-1$ et $2k$. En notant P_i la probabilité de l'événement « obtenir Pile au rang i », il vient, même pour $k = 2$:

Ainsi $P(AG_{2k}) = P(E_{2k-2} \cap P_{2k-1} \cap P_{2k})$. Soit par indépendance :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} P(AG_{2k}) & = & (2pq)^{k-1}p^2 \\ P(AG_{2k-1}) & = & 0 \end{cases}$$

3. Avec des notations évidentes :

$$P(AG) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(AG_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(AG_{2k}) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (2pq)^{k-1}$$

et comme $0 \leqslant 2pq < 1$:

$$P(AG) = \frac{p^2}{1-2pq}$$

4. En permutant les rôles de Pile et Face, il vient de même :

$$P(BG_{2k}) = (2pq)^{k-1}q^2 \,;\, P(BG) = \frac{q^2}{1-2pq}$$

D'où : $P(AG) + P(BG) = \dfrac{p^2+q^2}{1-2pq} = \dfrac{(p+q)^2 - 2pq}{1-2pq} = 1$

Il est donc quasi-impossible que personne ne gagne, c'est-à-dire que la partie dure indéfiniment.

5. a) Le résultat de la question précédente montre que X est bien une variable aléatoire, prenant ses valeurs dans $2\mathbb{N}^*$, avec :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(X = 2k) = P(AG_{2k}) + P(BG_{2k}) = (2pq)^{k-1}(p^2+q^2)$$

b) La convergence étant banale :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k(2pq)^{k-1}(1-2pq) = 2(1-2pq) \sum_{k=1}^{+\infty} k(2pq)^{k-1}$$

Soit :

$$E(X) = \frac{2(1-2pq)}{(1-2pq)^2} = \frac{2}{1-2pq}$$

Exercice 4.2.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de D.

c) Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$, pour tout $x \in D$.

d) En déduire les variations de f.

2. Montrer que f réalise une bijection de D sur D, et déterminer $f^2 = f \circ f$.

3. Soit x un réel donné, $x \in D$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Déterminer la nature de la suite (u_n).

Solution :

1. a) $f(x)$ est bien défini lorsque $\ln x$ est défini et non nul, donc :

$$D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

b) Sans problèmes :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1\,;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0\,;\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^y = +\infty$$

c) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, car composée de fonctions dérivables, avec :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} \times \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

d) D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	1	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

2. Le tableau de variation précédent montre que f réalise une bijection de D sur D et pour tout x de D, on a : $\ln\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{\ln x}$, soit : $\ln x = \dfrac{1}{\ln(f(x))}$ et :

$$x = \exp\big(\frac{1}{\ln(f(x))}\big) = f\big(f(x)\big)$$

Ainsi $f \circ f = Id_D$ et f^{-1} concide avec f.

3. Notons déjà que puisque $f(D) \subset D$, la suite est bien définie et comme $f \circ f = Id_D$, on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{2n} = f^{2n}(x) = u_0 = x, u_{2n+1} = f\big(f^{2n}(x)\big) = f(u_0) = u_1 = f(x)$

Par conséquent la suite u converge si et seulement si $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \exp\big(\frac{1}{\ln x}\big) = x \iff \frac{1}{\ln x} = \ln x \iff (\ln x)^2 = 1$$

Finalement :

$$u \text{ converge} \iff x \in \{\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}\}$$

Exercice 4.3.

Soit UVW un triangle équilatéral de côté de longueur 1. Une puce part du point U à l'instant $n = 0$ et se déplace sur les sommets du triangle. Si à l'instant n elle se trouve sur un sommet, elle se trouvera à l'instant $n+1$ sur l'un des deux autres sommets avec équiprobabilité.

On appelle u_n (resp. v_n, w_n) la probabilité que la puce se trouve au sommet U (resp. V, W) à l'instant n. Enfin, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A, indépendante de n, telle que pour tout entier naturel n, on ait $X_{n+1} = AX_n$.

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

3. Calculer A^n, pour $n \geqslant 1$ et en déduire les valeurs de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

4. Soit L la longueur parcourue par la puce à l'instant où, pour la première fois, les trois sommets du triangle ont été visités.
Déterminer la loi de L et calculer son espérance.

Solution :

1. Avec des notations évidentes, la formule des probabilités totales donne, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1}) + P(W_n)P_{W_n}(U_{n+1})$$

Soit, avec les probabilités conditionnelles données dans l'énoncé :

$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{2}P(V_n) + \frac{1}{2}P(W_n) : u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + w_n)$$

De la même façon : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n)$; $w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.
On peut donc prendre :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

3. On a $A = \frac{1}{2}(J - I)$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $2A = J - I$ et puisque I et J commutent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k$$

Or un calcul élémentaire donne $J^2 = 3J$ et donc, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1} J$$

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 2^n A^n &= (-1)^n I + \Big[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1}\Big] J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k - (-1)^n\Big] J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\big[(3-1)^n - (-1)^n\big] J \end{aligned}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{3{\times}2^n}\big[3(-1)^n I + (2^n - (-1)^n)J\big]$$

La relation $X_{n+1} = AX_n$ donne, pour $n \geqslant 1$, $X_n = A^n X_0$ et comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit de recopier la première colonne de A^n pour obtenir :

$$\forall\, n \geqslant 1, u_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3{\times}2^n}\ ;\ v_n = w_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3{\times}2^n}$$

4. Chaque déplacement est de longueur 1, donc L n'est autre que le nombre n de déplacements justes nécessaires pour visiter les trois sommets.

$\to$ A l'instant 1, on a visité le sommet U et et l'un des points V ou W (nous noterons ce dernier point P, l'autre étant noté Q).
$\to$ A partir de cet instant, chaque déplacement fait amène la puce au point manquant avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et ramène la puce en un point déja visité avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (en clair, tant que l'on ne visite pas le point manquant, la puce effectue des va-et-vient entre les points U et P).

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on conclut au rang n si et seulement si du rang 2 au rang $n-1$, on se promène entre U et P et si au rang n on arrive enfin en Q.
Par indépendance des déplacements faits, on a donc :

$$\forall\, n \geqslant 2, P(L = n) = \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n-2}{\times}\tfrac{1}{2} = \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n-1}$$

On vérifie alors que $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, donc L est bien une variable aléatoire. Mais on remarque également que $L-1$ suit en fait la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, ce qui prouve que L admet une espérance, avec :

$$E(L) = E(L-1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

Exercice 4.4.

Soit a un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+I)(A-2I)$, où I représente la matrice identité d'ordre 3.

2. En déduire les valeurs propres possibles de A. La matrice A est-elle inversible ?

3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale, une matrice P inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

Solution :

1. Facilement : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix} = 2I + A$, d'où :

$$A^2 - 2I - A = (A+I)(A-2I) = 0$$

2. Soit λ une valeur propre de A et X une colonne propre associée, on a $AX = \lambda X$ et $A^2X = \lambda^2 X$, d'où : $0 = (A^2 - A - 2I)X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X$, et :
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ et } \lambda \in \{-1, 2\}$$
Comme 0 n'est pas valeur propre de A, la matrice A est inversible.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\star\ AX = -X \iff \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \frac{1}{a}x + y + az = 0 \\ \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y + z = 0 \end{cases} \iff x + ay + a^2z = 0$$
Donc -1 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant le plan d'équation $x+ay+a^2z = 0$, que l'on peut engendrer par les colonnes $\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\star$ Des calculs similaires donnent $AX = 2X \iff \begin{cases} y = az \\ x = a^2z \end{cases}$, ce qui prouve que 2 est valeur propre, le sous-espace propre étant la droite engendrée par $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$.

La théorie de la réduction montre alors que A est diagonalisable et que pour
$$D = \operatorname{diag}(-1, -1, 2) \text{ et } P = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^2 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
la matrice P est inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 4.5.

Une infinité de joueurs $J_1, J_2, \dots$ jouent l'un après l'autre dans l'ordre de leurs indices. À chaque joueur J_k est imparti un événement A_k dont la probabilité de réalisation est un réel $p_k \in]0, 1[$. On notera $q_k = 1 - p_k$ et on pose $q_0 = 1$.

Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti.
On note G_k l'événement « le joueur J_k gagne » et on suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués.

1. Déterminer pour tout $k \geqslant 1$, la probabilité $P(G_k)$ de l'événement G_k.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = q_0q_1 \cdots q_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} q_k$.
Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $a \in [0, 1]$.

3. Déterminer en fonction de a la probabilité que le jeu se termine.

4. On suppose dans cette question que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $q_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n(n+1)}}$.
Soit N la variable aléatoire donnant le numéro du joueur gagnant si le jeu se termine et donnant 0 sinon.
Déterminer la loi de N. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Solution :

1. Pour que J_k gagne, il faut d'abord que J_k joue, ce qui est sûr pour J_1, mais nécessite que $J_1, \dots, J_{k-1}$ perdent si $k \geqslant 2$, J_k jouant alors et gagnant. Ainsi, par indépendance supposée :

$$P(G_1) = p_1 \text{ et pour } k \geqslant 2,\ P(G_k) = q_1 q_2 \dots q_{k-1} p_k.$$

Avec la convention $q_0 = 1$, on peut donc écrire :

$$\forall\, k \geqslant 1, P(G_k) = \Big(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\Big) p_k$$

2. La suite (u_n) est clairement à valeurs dans $[0,1]$ et décroissante, donc convergente de limite a appartenant à $[0,1]$ (elle est même strictement décroissante et $a \in [0,1[$).

3. Notons T l'événement « le jeu se termine », c'est-à-dire « l'un des joueurs gagne ». Les événements G_k étant deux à deux incompatibles, on a :

$$P(T) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_0 q_1 \dots q_{k-1} p_k$$

soit, en remplaçant p_k par $1 - q_k$, et par télescopage :

$$P(T) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - \lim_{n\to\infty} u_n = 1 - a$$

4. On a ici :

$$u_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{1\times 2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\times 3}} \times \dots \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{(n-1)\times n}}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \times \dots \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{(n-1)}+\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}$$

$\star$ Ainsi, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$P(N = n) = P(G_n) = u_n - u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-1}$$

Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1}-1} - \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ et :

$$P(N = 0) = \mathrm{e}^{-1}$$

$\star$ Pour $n \geqslant 1$: $nP(N = n) = n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}\big(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\big) = n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}\big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n(n+1)}}\big)$
et comme $1 - \mathrm{e}^{-x} \underset{(0)}{\sim} x$, il vient :

$$nP(N = n) \sim n\,\mathrm{e}^{-1} \frac{1}{(n+1)n} \sim \frac{1}{n\,\mathrm{e}}$$

La règle de Riemann assure alors que la série de terme général $nP(N = n)$ est divergente et N ne possède pas d'espérance.

Exercice 4.6.

Soit p un réel de $]0,1[$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$-\ln(1-p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k+1}}{k+1} + \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

2. On définit une suite réelle $(u_k)_{k\geqslant 0}$, par, pour tout $k \geqslant 0$:

$$u_k = -\frac{p^{k+1}}{(k+1)\ln(1-p)}$$

Montrer que (u_k) est la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Après avoir établi leur existence, calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Solution :

1. Pour $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$: $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, soit :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

et en intégrant sur le segment $[0,p]$ (licite puisque $0 < p < 1$) :

$$\int_0^p \frac{dx}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^p x^k\,dx + \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

c'est-à-dire :

$$-\ln(1-p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k+1}}{k+1} + \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

2.Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx \leqslant \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-p}\,dx = \frac{1}{1-p}\times\frac{p^{n+2}}{n+2} \leqslant \frac{1}{(1-p)(n+2)}$

et, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx = 0$, ce qui prouve que la série de terme général $\dfrac{p^{k+1}}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, converge, de somme $-\ln(1-p)$.

Cela signifie exactement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1$ et puisque $u_k \geqslant 1$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien une loi de probabilité.

3. $\star$ Les séries de termes généraux respectifs ku_k et k^2u_k sont clairement convergentes, puisque par négligeabilité classique, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^4u_k = 0$.

$\star$ On écrit :

$$E(X+1) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)u_k = -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=0}^{\infty} p^{k+1} = -\frac{1}{\ln(1-p)}\times\frac{p}{1-p}$$

d'où :

$$E(X) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\times\frac{p}{1-p} - 1$$

$\star$ De même :

$$\begin{aligned}E((X+1)(X+2)) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)u_k = -\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)p^{k+1}\\ &= -\frac{1}{\ln(1-p)}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)p^i - 1\Big)\\ &= -\frac{1}{\ln(1-p)}\Big(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\Big)\end{aligned}$$

Soit : $E(X^2+3X+2) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\big(\frac{1}{(1-p)^2}-1\big)$ et :

$$E(X^2) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\big(\frac{1}{(1-p)^2}-1\big)+3\big(\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)}+1\big)-2$$

La variance $V(X)$ s'en déduit par la relation $V(X) = E(X^2)-E(X)^2$.

Exercice 4.7.

On admet le résultat suivant : si U et V sont deux variables aléatoires continues indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, une densité de $U+V$ est donnée par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\,dt$$

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où λ est un réel strictement positif donné.

1. Déterminer la loi de $X+Y+Z$.

Pour tout $\omega\in\Omega$, on note $M(\omega)$ la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega)\end{pmatrix}$.

2. a) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

b) Déterminer la probabilité que M admette une valeur propre λ telle que $|\lambda| > 1$.

Solution :

1. $\star$ Une densité f_{X+Y} de $X+Y$ est donc donnée par :

pour $x \geqslant 0$, $f_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t} f_Y(x-t)\,dt$

$$= \int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,dt = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^x dt, \text{ soit :}$$

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \lambda^2 x.\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0\end{cases}$$

$\star$ De la même façon, Z étant indépendante de $X+Y$, une densité f_{X+Y+Z} de $X+Y+Z$ est donnée par :

pour $x \geqslant 0$:

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(t) f_Z(x-t)\,dt = \int_0^x \lambda^2 t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,dt$$

$$= \lambda^3\mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^x t\,dt, \text{ soit :}$$

$$f_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} \lambda^3\frac{x^2}{2}.\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0\end{cases}$$

2. a) On voit facilement que $[M(\omega)]^2 = (X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega))M(\omega)$.

Donc si $X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega) \neq 0$, alors $X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)$ est valeur propre de $M(\omega)$ et comme 0 est aussi valeur propre de sous-espace propre associé de dimension 2 (la matrice $M(\omega)$ est alors de rang 1), la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable.

Si $X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0$, alors $M(\omega) = 0$ qui est diagonalisable.

Comme X, Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a fait le tour du problème et $M(\omega)$ est toujours diagonalisable.

b) $M(\omega)$ admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| > 1$ si et seulement si $|X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)| > 1$, soit en notant p la probabilité ce cet événement :

$$p = P(|X+Y+Z| > 1) = P(X+Y+Z > 1) = \frac{\lambda^3}{2}\int_1^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$

soit, tous calculs faits :

$$p = \frac{\lambda^3}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\big(\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\big)$$

Exercice 4.8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait que A_n est diagonalisable.

2. Donner les valeurs propres de A_n ainsi que les espaces propres associés.

3. Calculer $(A_n)^n$.

4. On dit qu'une suite $(B_k)_k$ de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ converge si les suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$, $(c_k)_k$, $(d_k)_k$ définies par $B_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ sont convergentes.

La matrice $B = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} a_k & \lim\limits_{k\to\infty} b_k \\ \lim\limits_{k\to\infty} c_k & \lim\limits_{k\to\infty} d_k \end{pmatrix}$ est alors appelé limite de la suite $(B_k)_k$.

Montrer que les suites $(A_{2k}^{2k})_k$, $(A_{2k+1}^{2k+1})_k$ convergent vers des matrices S et T que l'on déterminera.

Solution :

1. La matrice A_n est symétrique (réelle) donc diagonalisable.

2. Pour $n = 1$, on a : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1, le sous-espace propre associé étant $\mathbb{R}^2$.

Pour $n \geqslant 2$, on voit aisément que :

$\star$ 1 est valeur propre de A_n, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\star$ $-1+\dfrac{2}{n}$ est valeur propre de A_n, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1+\dfrac{2}{n} \end{pmatrix}$ on a $A_n = PDP^{-1}$, avec $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $A_n^n = PD^nP^{-1}$, soit tous calculs faits :

$$A_n^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1+\frac{2}{n})^n & 1-(-1+\frac{2}{n})^n \\ 1-(-1+\frac{2}{n})^n & 1+(-1+\frac{2}{n})^n \end{pmatrix}$$

4. Si n tend vers l'infini, on a $-1+\dfrac{2}{n} < 0$ et il convient de faire très attention aux signes ...

Pour $k \geqslant 2$: $\big(-1+\frac{2}{2k}\big)^{2k} = \big(1-\frac{2}{2k}\big)^{2k} = \mathrm{e}^{2k\ln(1-\frac{1}{k})}$

Pour $k \geqslant 1$: $\big(-1+\dfrac{2}{2k+1}\big)^{2k+1} = -\big(1-\dfrac{2}{2k+1}\big)^{2k+1} = -\mathrm{e}^{(2k+1)\ln(1-\frac{2}{2k+1})}$

Sachant que $\ln(1+u) \underset{(0)}{\sim} u$, il vient :

$$\lim_{k\to\infty} 2k\ln(1-\frac{1}{k}) = -2 \text{ et } \lim_{k\to\infty}(2k+1)\ln(1-\frac{2}{2k+1}) = -2$$

et donc, par continuité de la fonction exponentielle :

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty}[(A_{2k})^{2k}] = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} & 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \\ 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} & 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} \\ \lim\limits_{k\to\infty}[(A_{2k+1})^{2k+1}] = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} & 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \\ 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} & 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} \end{cases}$$