<u>Planche</u> I. Analyse - Probabilité (Mathilde Ducruix)

Exercice 1. Soit g une fonction dérivable de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$ et $f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon g(x)$, avec $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe ε_0 tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, f_ε est strictement croissante.
2. Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, en déduire que f_ε réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On étudie un dé à 6 faces équilibré. On note X_i le résultat du i-ème lancer de ce dé. Posons $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. Montrer que : $\quad \forall k \in [\![0, 6]\!], \quad P(M_n \leqslant k) = (k/6)^n$.
2. Montrer que : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} E(M_n) = 6$.

Indications –
Exercice 1 : On note $M > 0$ tel que $-M \leqslant g'(x) \leqslant M$.
(1) Il s'agit de choisir ε tel que $f'_\varepsilon(x) > 0$. Il suffit de choisir ε tel que $1 - \varepsilon M > 0$.
(2) Il s'agit d'utiliser le théorème de la bijection. La principale difficulté est de montrer que l'image est $\mathbb{R}$: il faut calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. On part de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -M \leqslant g'(t) \leqslant M$$

On intègre cette inégalité entre 0 et x ($x > 0$) et on obtient :

$$-Mx \leqslant g(x) - g(0) \leqslant Mx$$

Puis, en particulier :

$$\varepsilon g(0) + x(1 - \varepsilon M) \leqslant f_\varepsilon(x)$$

Ce qui permet de déduire : $\quad \lim\limits_{+\infty} f_\varepsilon(x) = +\infty$.

Exercice 2 :
(1) A priori, aucune difficulté.
(2) On part de la définition de l'espérance :

$$E(M_n) = \sum_{k=1}^{6} kP(M_n = k)$$

Puis on remarque :

$$P(M_n = k) = P(M_n \leqslant k) - P(M_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

On remplace dans la somme FINIE et on utilise les résultats sur les limites des suites géométriques. Bien remarquer que c'est n qui tend vers $+\infty$, pas k.

Planche II. Analyse - Algèbre (Mathilde Ducruix, Lison Grappin)

Exercice 1. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Calculer AP.
2. Pour $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, déduire de 1) les valeurs propres de A et prouver que P est inversible.
3. Dans le cas général : donner les valeurs propres de A et calculer $P^{-1}AP$

Exercice 2. On pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{5 - 4\cos x} dx$

1. Montrer que $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et que $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$.
2. On pose $I_0 = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer I_1.
3. Trouver une relation entre I_{n-1}, I_n, I_{n+1}.
4. Exprimer I_n en fonction de n.

Indications –
Exercice 1 : On commence par remarquer que j est une racine cubique de l'unité donc $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
De plus : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad j^2 = \bar{j} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(1) On a $AP = \begin{pmatrix} a+b+c & a+jb+j^2c & a+j^2b+jc \\ a+b+c & j(a+jb+j^2c) & j^2(a+j^2b+jc) \\ a+b+c & j^2(a+jb+j^2c) & j(a+j^2b+jc) \end{pmatrix}$

(2) Dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad AP = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & 1 \end{pmatrix}$

– La première colonne de AP est le produit de A et de la première colonne de P.
Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 (cas général : $a + b + c$).

– De même, $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre j (cas général : $a + jb + j^2c$).

– De même, $\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre j^2 (cas général : $a + j^2b + jc$).

Comme les valeurs propres 1, j et j^2 sont distinctes et que A est carrée d'ordre 3, on en déduit que A est diagonalisable et la matrice P est une matrice formée d'une famille de vecteurs propres de A (qui est diagonalisable donc cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$) donc P est inversible.
(3) SANS AUCUN CALCUL, la matrice $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale avec les coefficients $a + b + c$, $a + jb + j^2c$ et $a + j^2b + jc$ sur la diagonale (P est une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de A).

Exercice 2 :
(1) Identifier les parties réelles de $e^{i(x+y)}$ et $e^{ix}e^{iy}$.
On remplace y par $-y$ puis on additionne les deux formules.
(2) L'astuce consiste à écrire : $\quad \cos(x) = -\dfrac{1}{4}(5 - 4\cos(x)) + \dfrac{5}{4}$,
Puis on utilise la valeur de I_0. On trouve : $I_1 = \dfrac{\pi}{6}$
(3) Contrairement à l'habitude, il ne s'agit pas de faire une intégration par parties. On remarque d'après (1) :

$$\cos((n - 1)x) + \cos((n + 1)x) = 2\cos(nx)\cos(x)$$

Et on utilise la même astuce que précédemment pour remplacer $\cos(x)$. On trouve :

$$I_{n-1} + I_{n+1} = \frac{5}{2} I_n$$

(4) Il s'agit suite récurrente linéaire d'ordre 2. Le jury vous guidera.

<u>Planche</u> III. Analyse-Probabilité (Claire-Lise Dubost)

Exercice 1. Soit f une fonction continue et bornée, définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx$$
est définie.

2. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que
$$nI_n - f(0) = \int_0^{+\infty} n(f(x) - f(0)e^{-nx}dx$$

4. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$$

Exercice 2. Soit U une variable continue uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et E une variable continue exponentielle de paramètre 1.

1. On pose $X = -\ln(U)$. Déterminer la loi de X.

2. On pose $Y = \exp(-E)$. Déterminer la loi de Y.

Indications –
Exercice 1 : Il faut introduire $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| \leqslant M$.
(1) On a $|f(x)|e^{-nx} \leqslant Me^{-nx}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$ existe (on connait une primitive et elle converge en $+\infty$). Donc l'intégrale I_n converge absolument donc converge.
(2) On part d'un encadrement de f entre $-M$ et M. On multiplie par e^{-nx} puis on intègre entre 0 et A. On conclut en faisant tendre A vers $+\infty$. On ontient un encadrement de I_n qui permet de trouver : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
(3) Par linéarité de l'intégrale, on trouve la formule voulue.
(4) On va montrer que $nI_n - f(0)$ tend vers 0 en utilisant l'expression précédente.
C'est une question assez technique. Il s'agit d'utiliser la définition de la limite des suites avec les quantificateurs et la définition de la continuité de f en 0. On commence :
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ on ait : $-\varepsilon \leqslant f(x) - f(0) \leqslant \varepsilon$.
On multiplie par ne^{-nx}, on intègre entre 0 et (attention) α et on trouve un encadrement de
$$\int_0^{\alpha} n(f(x) - f(0)e^{-nx}dx.$$
On encadre en suite
$$\int_{\alpha}^{+\infty} n(f(x) - f(0)e^{-nx}dx$$
à l'aide de la majoration $|f(x) - f(0)| \leqslant |f(x)| + |f(0)| \leqslant 2M$.
Le jury vous guidera pour conclure !

Exercice 2 : Aucune difficulté spécifique. Seule une bonne connaissance du cours est nécessaire. Commencer par les valeurs prises puis la fonction de répartition puis une densité.

<u>Planche</u> IV. Analyse-Probabilité

Exercice 1. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (-1)^n \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages dans les conditions suivantes : si on tire une boule noire, on arrête, et si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire.

1. Déterminer la loi de X

2. Justifier sans calcul que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

3. La variable X admet-elle une espérance ?

Exercice supplémentaire 1 :

On considère une urne comprenant des boules blanches en proportion $p \in]0,1[$, et des boules noires en proportion $1-p$. On tire avec remise des boules dans cette urne. Pour $r \geqslant 1$, on note X_r la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage de la r-ième boule blanche. Déterminer la loi de X_r.

Exercice supplémentaire 2 :

1. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

2. Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$$

est convergente.