MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Aurélien Garivier, Gilles Stoltz

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (le candidat n'a pas le choix de la planche mais peut traiter les exercices et les exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

Commentaires généraux

Nous avons ressenti que cette année, à l'oral, le niveau moyen des candidats était en retrait par rapport à la session précédente (qui, il faut le rappeler, avait été un très bon cru). Cela peut s'expliquer, comme on le verra dans le rapport général du concours, par une homogénéisation des notations (notamment en termes d'écart-types) entre les différentes disciplines à l'écrit, d'où un poids plus équitable accordé à chacune et l'admissibilité de candidats aux profils plus équilibrés.

Nous nous sommes cependant tenus à une répartition des notes similaire à celle de l'an dernier (entre 1 et 20 toutefois, plutôt qu'entre 2 et 20 comme à la session précédente), à savoir :

- 12 notes inférieures ou égales à 5 (candidats ayant de grosses lacunes *et* manquant d'habilité mathématique),
- 18 notes comprises entre 6 et 8 (lacunes *ou* manque d'habilité),
- 28 notes supérieures ou égales à 9, dont 8 notes supérieures ou égales à 15.

Nous avons encore une fois essayé de balayer l'ensemble du programme, et pour chaque candidat nous avons testé un maximum de compétences. Bien évidemment, les parties du programme plus directement nécessaires aux enseignements d'économie et de sciences sociales que les étudiants pourront suivre après leur admission sont un peu favorisées (fonctions de deux variables, optimisation, probabilités et statistiques).

A propos du format des exercices. Chaque planche est composée de deux exercices indépendants portant sur des points différents du programme. Le plus souvent, elle est composée d'un exercice de probabilités ou de statistiques, et d'un exercice d'algèbre ou d'analyse. Nous avons essayé d'équilibrer les exercices en les découpant chacun en trois ou quatre questions, la première d'entre elles tâchant d'être facile afin de mettre en confiance les candidats, et les suivantes étant de difficulté progressive. On pourra évidemment déplorer certains ratés (premières questions trop difficiles, gradients de difficulté trop forts, exercices trop longs) mais nous pensons qu'en nous fondant sur l'expérience de cette session, nous serons à même l'an prochain d'avoir enfin un format homogène et accessible. Par ailleurs, nous avons pris soin, autant qu'il était possible, de rendre au moins les deux ou trois premières questions indépendantes les unes des autres, pour permettre aux candidats de ne pas être bloqués trop rapidement (mais encore faut-il que ces derniers remarquent cette indépendance !).

Il est à noter que les meilleurs candidats traitent presque toutes les questions des deux exercices, tandis que les plus faibles ne s'intéressent qu'à la première question de chacun des deux exercices. Le format proposé ci-dessus, bien qu'un peu long, s'adapte ainsi de manière naturelle à tout le spectre des candidats.

Enfin, nous précisons sur certaines planches des questions bonus ou d'oral que nous avions préparées (et que souvent, nous n'avons pas posées, sauf aux candidats les plus à l'aise). Nous espérons qu'elles seront utiles pour un approfondissement lors des cours et séances d'exercices dans les préparations. Ces questions ne figuraient évidemment pas sur les sujets donnés aux candidats.

A propos de la gestion du temps. Nous revenons cette année encore sur la gestion du temps par les candidats. Lors de cette session, nous avons tâché de donner l'exemple, en demandant en préambule à chaque candidat la liste des questions qu'il avait traitées, au moins partiellement. Il est dans l'intérêt des candidats de répondre avec du recul et beaucoup d'honnêteté à cette requête, puisque de leur réponse dépend en grande partie le *tempo* imposé par la suite. Ainsi, si le candidat a traité de nombreuses questions, le jury ne demandera pas tous les détails du calcul sur les questions les plus simples et voudra y entendre une réponse orale claire et concise, contenant les arguments essentiels (un vœu que les candidats les plus à l'aise arrivent à satisfaire sans problème mais qui perturbe les candidats les plus faibles, qui ont besoin d'écrire les détails de leur raisonnement) ; ceci, afin d'arriver rapidement aux questions intéressantes : les dernières. A l'inverse, avec les candidats n'ayant traité que peu de questions, le jury les écoutera attentivement sur ces questions et saura, en fonction de leurs difficultés, choisir les éléments auxquels s'intéresser pendant le reste de l'oral.

Notre souhait est d'adapter l'interrogation le mieux possible au niveau des candidats et de valoriser au maximum ce qu'ils savent faire. Ceux-ci éviteront donc les situations suivantes lorsque nous leur demanderons la liste des questions traitées.

- "J'ai traité un peu toutes les questions", le jury se demandant souvent s'il ne faudrait pas comprendre qu'en fait aucune n'a vraiment été traitée, ce doute ne l'aidant pas à aider à gérer efficacement le temps.
- "J'ai traité la question (4)" alors qu'en fait, seule telle ou telle observation triviale a été formulée (par exemple, que la propriété est vraie lorsque la variable aléatoire est constante). En effet, le jury aura fait accélérer à tort sur les questions faciles.
- Au contraire, ne pas mentionner une question pour laquelle on a pourtant une solution correcte ou quasi-complète : on a encore dû, cette année, tirer les vers du nez d'une dizaine de candidats n'ayant pas suffisamment confiance en eux.

Dans de nombreux cas, il faut être prêt à fournir, de manière concise et claire et à l'oral, l'argument central de la résolution d'une question et la démarche entreprise. Or, beaucoup de candidats rédigent au brouillon leur réponse comme s'il s'agissait d'un écrit, et la recopient ensuite laborieusement ligne après ligne, sans plus se souvenir où ils vont, et parfois même en se perdant dans les méandres d'un brouillon raturé en tous sens. Il n'est pas besoin de souligner que lorsque de telles situations arrivent, le temps perdu est immense. Nous rappelons qu'au contraire, lorsque les calculs sont longs, nous apprécions que quelques étapes intermédiaires du calcul soient sautées (au prix d'un bref commentaire oral sur la teneur de ces étapes) ; lorsqu'une erreur surgit, nous savons demander de revenir quelques pas en arrière.

A cet égard, il serait bon que les candidats présentent leurs raisonnements non pas dans l'ordre où ils y sont parvenus (par exemple, réduction d'une égalité à prouver à une égalité triviale), mais dans un ordre plus déductif, où l'on part d'un prémisse pour aboutir à ce qu'il s'agit de prouver. Là encore, c'est tout l'art de la présentation d'un raisonnement à l'oral qui est en jeu, art qui fait partie intégrante de la note, l'oral n'étant pas un écrit *bis*. Dans le même ordre d'idées, lors de la preuve d'une équivalence, les candidats n'indiquent quasiment jamais quel sens (direct ou réciproque) ils prouvent, quelles sont les hypothèses qu'ils formulent et ce qu'ils cherchent à montrer. D'ailleurs, ils oublient souvent de prouver un sens de l'équivalence, ou ont l'impression d'écrire des équivalences alors qu'en fait ils présentent des implications.

Enfin, le tableau est souvent mal géré (les candidats commencent par écrire au milieu puis tout autour, sur des espaces parfois réduits à des timbres-poste). Notre suggestion serait de le couper (virtuellement) en deux et de commencer en haut à gauche.

Erreurs et manquements récurrents. Le jury a été particulièrement étonné que les candidats maîtrisent aussi mal l'alphabet grec : puisqu'il est très utile en mathématiques, on peut s'attendre à ce que des étudiants au profil par ailleurs littéraire fassent l'effort d'apprendre au moins ses lettres les plus courantes !

On entend souvent le mot de déterminant pour parler du discriminant d'un polynôme. C'est d'autant plus surprenant que la notion de déterminant n'est explicitement pas au programme. (On rappelle que tacitement le jury est cependant prêt à entendre parler du déterminant d'une matrice 2×2 et de la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité qui y est associé dans ce cas, mais dans ce cas uniquement.)

Le jury a souvent été fort surpris par le manque d'habilité à représenter des fonctions simples, comme la fonction polynôme $x \mapsto (x - x_0)^2$, la densité de la loi de Cauchy standard, la fonction $x \mapsto \log(1 - x)$, etc. De même, la manipulation élémentaire et la représentation dans le plan des nombres complexes semblent gêner beaucoup certains candidats. Dans les années à venir, le jury ne manquera pas de tester plus systématiquement que de telles compétences élémentaires et indispensables sont maîtrisées, faute de quoi il paraît assez vain de tenter de résoudre des questions plus difficiles.

Commentaires plus spécifiques

Planche 1.
Dans l'exercice L/a, à la question (2), les étudiants prouvent tous que 1 est la seule valeur propre éventuelle, souvent en recourant au concept de polynôme annulateur, et parfois en ayant besoin de calculer un discriminant alors qu'il s'agit du polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$; aucun n'a vu qu'il s'agissait ensuite de déterminer si 1 était effectivement valeur propre ou pas. D'une manière générale, les candidats auraient gagné dans cet exercice à poser $v = u - \mathrm{id}_E$ et à noter que $v^2 = 0$: les endomorphismes nilpotents abondant dans les sujets des années précédentes, cela aurait sans doute permis de faire remonter quelques réflexes (comme le fait de remarquer que l'image de v est incluse dans son noyau).
Avant de commencer à traiter précisément l'exercice Na, il aurait été profitable de faire un graphe de P_n, afin de voir ce que le calcul allait prouver. Le jury aurait notamment apprécié un raisonnement intuitif reliant les limites des racines de P_n à celles du polynôme limite $P(x) = (x-1)(2-x)$. Du côté du traitement mathématique précis, on déplore le fait qu'aucun candidat n'ait quantifié l'assertion "pour n assez grand" et que tous aient proposé deux racines pour P_n, alors que pour n petit, son discriminant était négatif. Enfin, à la question (1), lors de l'écriture puis de l'utilisation de développements limités, beaucoup n'ont pas su dire quelle était la limite de $n \times o(1/n)$ lorsque $n \to \infty$.

Planche 2.
Certains candidats sont arrivés à traiter la question (1) de l'exercice LY/d de manière inefficace, en particularisant la relation en différents points x ; aucun n'a pensé à regarder le comportement en $+\infty$ et même ceux à qui nous donnions cette indication se révélaient incapables de l'utiliser. A la question (2), certains confondaient le fait que T_h soit un endomorphisme et le fait que $T_h(f)$ le soit ; on a ainsi entendu un candidat dire qu'on ne savait pas si f était linéaire tandis qu'un autre pensait que l'espace vectoriel sous-jacent était $\mathbb{R}$. A la question (3) sont apparus les problèmes habituels de logique lors du traitement d'une équivalence ; les candidats prétendent notamment qu'il faut que $\sin h = 0$ pour assurer la diagonalisabilité, alors que c'est une condition évidemment uniquement suffisante.
L'exercice PeN n'a pas été très apprécié par les candidats, qui étaient déroutés face à l'objet de la question (1) : ils pensaient qu'il s'agissait de déterminer le support de la loi de Y_n. Les candidats bloqués par cette question n'ont pas pensé à regarder la question (3), qui était

pourtant absolument indépendante du reste. Enfin, même sans avoir su indiquer en (1) qui était y_n^*, on pouvait malgré tout avoir l'intuition que la limite demandée en (2) était nulle et que sans doute cela reposait sur une loi des grands nombres ou sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (après quoi le jury aurait aidé à formaliser cette intuition).

Planche 3.
Dans le passé, le jury avait déjà proposé plusieurs exercices qui résolvaient de manière piétonne un problème d'extrema liés (ces derniers étant d'ailleurs explicitement au programme) et l'exercice Y/a était très proche d'eux. Cela a donc été une désagréable surprise de constater le manque d'aisance de deux candidats sur les trois ; ceux-ci traitaient f_2 comme une fonction définie sur tout $\mathbb{R}^2$ et s'intéressaient à ses points critiques. Pour la seconde partie de la question (1), le jury aurait aimé que l'on utilise un argument d'homothétie plutôt que de répéter le raisonnement.
L'exercice PfA était un peu calculatoire mais un candidat s'en est très bien sorti. La linéarité de la covariance ne semble pas connue.

Planche 4.
Le cas où $a_{n,n} = \lambda$ et $a_{1,n} = \ldots = a_{n-1,n} = 0$ a souvent été oublié à la question (1) de l'exercice L/b. A la question (2), peu ont compris le rôle dissymétrique joué par A (fixée, sur qui on veut donner des conditions) et B (paramètre libre, que l'on peut particulariser), de sorte qu'ils s'arrêtaient après avoir retraduit matriciellement la relation souhaitée sans l'exploiter. La question (3), comme nous l'avions prévu, a suscité des difficultés conceptuelles.
Les étudiants proposent des tracés fantaisistes pour la densité dont il est question à l'exercice L/b. Le concept de médiane semble inconnu, alors qu'il est explicitement au programme. A la question (3), beaucoup ne voient pas que l'on tombe naturellement sur une forme indéterminée ; à notre question de savoir comment lever l'indétermination, il n'a été proposé que trop peu souvent la détermination d'un équivalent (ou le calcul d'un développement limité). Enfin, au hasard d'interrogations à propos du cercle trigonométrique, il est apparu que les candidats ne savaient pas comment l'utiliser pour lire la valeur de la tangente d'un angle (ce qui en soi n'est pas un manquement condamnable, mais plutôt une connaissance qu'il serait utile d'avoir).

Planche 5.
A la question (1) de l'exercice P/a, les mots "loi géométrique" n'ont généralement pas été prononcés spontanément. Les candidats ont eu plus de mal que nous le pensions à traduire le jeu en formules mathématiques ; la probabilité du succès a souvent été mal évaluée et prise égale à $1/n$. L'inégalité de la question (2) est visiblement familière aux candidats. Nous n'avons pas été pénibles sur les hypothèses légitimant l'interversion des sommations, même si nous aurions apprécié à sa juste valeur le commentaire qui aurait consisté à dire qu'elle est légitimée par la positivité des quantités en jeu.
La question (1) du second exercice permettait de tester une habileté minimale en calcul ; il ne faut jamais oublier qu'on peut également partir du membre de droite et aboutir au membre de gauche pour prouver une égalité, c'était ici le sens le plus naturel, peu exploité les candidats qui presque tous sont partis de l'expression de gauche ! La question (2) n'a été traitée de manière satisfaisante par aucun des trois candidats, qui tous ignoraient les hypothèses précises du théorème de changement de variables (et pensaient qu'il suffisait d'une hypothèse de continuité ou de classe C^1).

Planche 6.
L'exercice Gb commence notamment par prouver dans un cas assez général qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable, un résultat (re)connu par un candidat, qui n'arrive pourtant pas à l'établir. Il était tout à fait légitime d'admettre le résultat de la question (1) pour traiter les suivantes, l'exercice était d'ailleurs écrit en ce sens. Nous proposions, lors du passage, l'indication de calculer $e_1^{\mathrm{T}} M e_2$ lorsqu'elle n'avait pas été résolue durant la préparation. A cet égard, il faut noter que lors de calculs d'expressions comme $x^{\mathrm{T}} M y = 0$ (pour x et y deux vecteurs de taille n), certains candidats simplifient par le vecteur ligne pour obtenir $My = 0$; cela est sans doute un réflexe pavlovien correspondant aux expressions de la forme $\lambda Mx = 0$ pour λ un scalaire non

nul. A la question (2), des candidats ont eu du mal à comprendre sur quoi portait le maximum (tous les vecteurs x non nuls de $\mathbb{R}^n$).
L'exercice Pd a été bien traité dans l'ensemble ; le chemin menant de la fonction de répartition à l'espérance en passant par la densité est bien maîtrisé. Le jury déplore simplement un manque de précision ou d'aisance face à la détermination du maximum de $s \in [0,1] \longmapsto 1+s-s^2$: si l'on détermine l'unique point critique, encore faut-il expliquer pourquoi le maximum est atteint en ce point (et notamment penser aux bords) ; le plus simple ici est évidemment de dire que l'on a affaire à un polynôme du second degré de coefficient dominant négatif, mais on peut également dresser un tableau de variations.

Planche 7.
La question (1) de l'exercice Y/b a été bien traitée, de différentes manières d'ailleurs. Lors de la question (2), les candidats effectuent les calculs sans réfléchir au contexte (par rapport à quelle variable on va dériver) et sans exploiter la symétrie entre a et b, perdant ainsi un temps précieux lors du calcul des points critiques.
Les questions (1) et (2) de l'exercice PcN n'ont pas soulevé de difficultés notables, mais pour la question (3), nous n'avons vu aucun candidat capable de proposer spontanément la bonne méthode, pourtant fortement suggérée par la question (2), à savoir, s'intéresser à la limite d'un taux d'accroissement. Nos perches consistaient à leur demander comment on leur avait défini la dérivée mais elles n'ont pas trouvé l'écho espéré.

Planche 8.
Un exercice très proche de Y/c avait été proposé à la session 2007. Comme il n'avait pas été un franc succès, nous avions fait le pari d'écrire un exercice sur le même sujet, en pensant que ce serait un cadeau fait aux étudiants. La question subsidiaire de notre part à la question (1) qui était de savoir si la fonction proposée par l'indication était dérivable aussi en 0 a laissé coi tous les candidats, aucun ne se souvenant plus du théorème limite de la dérivée. La seconde partie de la question (2) n'a été traitée par aucun candidat ; à vrai dire, aucun ne se souvenait plus de la définition de l'existence d'une dérivée partielle en un point, ce qui était fort gênant puisqu'ici, il fallait y revenir et qu'on ne pouvait pas se contenter d'un calcul mécanique. La question (3) a été moyennement bien traitée, les candidats voyant que $g/2$ est solution, mais éprouvant des difficultés à montrer que c'était la seule et ne pensant pas à introduire une autre solution h.
Dans l'exercice Gc, le traitement de la question (1) nous a parfois laissé songeurs. Par exemple, $(a+b+c)^2$ est souvent développé en deux temps, comme $\big((a+b)+c\big)^2$: pourquoi pas au brouillon, si le candidat en a besoin, mais présenter ce genre de détails au tableau ne fait que souligner un certain manque d'habileté. Comme de nombreux candidats l'ont noté, il est très utile pour la question (3) de raisonner sur un schéma : le jury a apprécié ce fait même quand la rigueur de l'exposé n'était pas parfaite. Les difficultés sont survenues lors de la preuve de la réciproque, les candidats ne tenant pas compte du fait qu'on ne peut pas parler du signe de $P'(a)$, $P'(b)$ et $P'(c)$ tant qu'on ne sait pas qu'ils sont réels. Il fallait alors se souvenir ou pouvoir retrouver à partir du théorème d'Alembert qu'un polynôme de degré 3 à coefficient réels admet deux racines complexes conjuguées ou aucune. A cet égard, le passage au conjugué semble une opération bien mystérieuse pour beaucoup (comme le traitement, d'une manière générale, des nombres complexes, mais c'est un point que nous avons souvent abordé dans les rapports précédents). Cela étant, dans l'ensemble, cet exercice a été traité de manière plutôt satisfaisante.

Planche 9.
A la question (1) de l'exercice R/a, quasiment tous les candidats ont essayé d'utiliser le résultat, faux en général, que les équivalents passaient à l'exponentielle ; ici, tout allait bien car il s'agissait d'équivalents à une constante non nulle. A cet égard, la plupart des candidats ne semblent pas savoir retraduire ce que signifie, pour une suite, le fait d'être équivalente à une constante non nulle. Il y a en fait une vraie confusion entre équivalents et limites : on a vu pour deux candidats des écritures du type $p_n \to \lambda/n$. Le jury sait que les questions (1) et (2) ont été vues

en cours et pensait que seule la question (3) était d'intérêt. Le traitement imprécis et maladroit des questions (1) et (2) lui a donné tort ! A la question (3), il aurait été bienvenu de reconnaître au moins que $n\,m_n$ suit une loi géométrique.
La première partie de la question Y/d n'a posé de problème que dans la présentation du raisonnement, les candidats partant de l'inégalité à prouver pour remonter à une trivialité, à savoir que $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}) \geq 0$. Il est plus élégant de partir de ce fait et d'en déduire l'inégalité. S'agissant de la récurrence à mener ensuite, le jury a été fort surpris que les candidats, qui remarquaient pourtant que dans l'inégalité générale il y avait n termes, persistent à penser, même lors du passage à l'oral, même suite à des remarques du jury, qu'il n'y avait que k termes, indexés par $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^k$, à considérer lorsqu'il s'agit de prouver l'inégalité pour $n = 2^k$. La question (3), de pure représentation graphique et totalement indépendante des autres questions, a donné lieu à des figures plus fantaisistes les unes que les autres, où les angles étaient placés non pas comme des angles mais comme des points sur l'axe des abscisses, où les candidats persistaient à penser que seuls des nombres complexes inclus dans le cercle unité étaient considérés, etc. La décomposition polaire (module, argument) est un concept décidément difficile à cerner pour eux, ce qui est d'autant plus inadmissible qu'elle relève du programme de terminale du lycée !

Planche 10.
La question (1) de l'exercice Ge nécessitait un travail de compréhension préalable (identification des sous-espaces en jeu et détermination de quel espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ ils étaient sous-espaces) que peu de candidats ont réussi à mener, malgré sa simplicité. La question (2) pouvait être traitée en admettant la question (1), ce qu'aucun candidat n'a vu ; il suffisait, pour répondre à sa seconde partie, de multiplier le membre de droite de l'égalité proposée par $A + UCV$ et de montrer qu'on obtenait alors l'identité. De même, la question (3) était une conséquence immédiate de la question (2).
L'exercice Ph revenait sur l'inégalité de Tchebychev-Cantelli, déjà proposée, sous une forme un peu différente, lors d'une planche de 2007. Là encore, le cadeau que le jury pensait faire aux candidats s'est révélé empoisonné ! L'inégalité de Tchebychev est souvent connue, mais les candidats ne pensent pas à particulariser la variable ε qu'elle met en jeu afin de transformer la quantité $1 - \varepsilon$ en $2/3$.

Planche 11.
La positivité de f à la question (1) n'a été bien démontrée que par un seul candidat, alors qu'il s'agissait quasiment d'une identité remarquable. Le reste de l'exercice a été traité de manière convenable, signe que, comme l'an dernier, les résultats élémentaires sur les fonctions de deux variables sont désormais maîtrisés.
La première question de R/b n'a été résolue par aucun candidat en préparation, qui tous ont proposé une expression de la forme $p\,F_0\,a^n + (1-p)\,F_0\,V_1 \ldots V_n$. Interpellés par le jury qui leur faisait remarquer que cela consistait simplement à faire une division de capitaux à l'an 0, ils sont généralement parvenus à se corriger “en direct”, ce qui a été apprécié. Cela étant, lorsqu'il s'agissait de maximiser en p une expression linéaire du type $p(a-\mu)+\mu$, nous avons été agacés de constater que systématiquement ils proposaient de mener une étude de fonctions en calculant la dérivée, etc. Il a deux fois été proposé à la question (3) d'utiliser une formule de Taylor-Young (et les candidats écrivaient bien des $o(h^2)$, d'ailleurs) alors qu'évidemment, c'est celle de Taylor-Lagrange qui convenait.

Planche 12.
On pouvait tout à fait utiliser la forme connue du développement limité de $(1+x)^\alpha$ à la question (1) de l'exercice LY/a, à condition de l'énoncer correctement et de savoir justifier d'où elle provient. La mauvaise compréhension des o a empêché certains de traiter des termes du type $\big(f(x)+o(x^k)\big)^2$.
Les questions (2) et (3) de l'exercice RY/a avaient déjà été posées dans un exercice de la session 2006, mais les questions (1) et (4) étaient nouvelles et pouvaient d'ailleurs être traitées

indépendamment des questions (2) et (3). Ici, le jury a assisté à deux planches très contrastées, une excellente planche et une mauvaise planche.

Planche 13.
La question (1) de Ne a été bien traitée. A la question (2), pour le tracé graphique, on attendait notamment une précision des comportements au voisinage de 0 : l'équivalence des trois fonctions à x et la conséquence en termes de tangente. A ce propos, certains confondent les termes et notions d'asymptotes et de tangentes. A la question (3), il n'est pas évident que la quantité considérée est croissante ; il ne suffit pas de dire que le nombre de termes dans la somme augmente, puisque chacun des termes, à k fixé, décroît avec n. La quantité en jeu n'est pas non plus une somme géométrique comme on l'a entendu. Enfin, un candidat a soutenu contre toutes nos remarques que la suite des avant-derniers termes des sommes, $\big((n-1)/n\big)^n$, tendait vers 0.
Les questions (1) et (2) de RY/c, bien que très proches de la partie 4 du problème du sujet d'écrit 2008, n'ont pas connu le succès escompté auprès des candidats. A la question (1), certains proposant un polynôme de la forme $c(X-x)(X-y)$ étaient étonnés de pouvoir choisir c en fonction de x, y, z. A la question (2), l'unicité a été un peu moins mal traitée que l'existence. Enfin, la question (3) a illustré que les candidats ne connaissaient pas les hypothèses du théorème de Rolle (certains se contentant d'une fonction continue, d'autres, insistant sur la nécessité du caractère C^1).

Planche 14.
Dans l'exercice L/c, il est assez rapidement clair que $\varphi(I_n)$ et $\varphi(0_n)$ vérifient $x^2 = x$. Malheureusement, les candidats ne voient pas toujours que cela implique qu'ils valent 0 ou 1 et qu'il s'agit d'exclure la mauvaise valeur. Un candidat a su mener le raisonnement de bout en bout en préparation (par l'absurde) et un autre l'a fait pendant l'oral. La question (3) a été jugée difficile ; cela étant, c'est notamment parce qu'aucun des trois candidats passés sur cette planche ne connaissait de manière précise la définition et la caractérisation du fait que deux matrices sont équivalentes (l'un d'entre eux soutenant même ne jamais avoir entendu parler de ce concept).
L'exercice Nd a été jugé difficile. C'est essentiellement une question de traduction de l'énoncé : deux candidats sur les trois ne sont jamais arrivés à représenter et comprendre ce qu'était un élément de $\mathcal{E}_k$; ils ne voyaient pas en particulier qu'un tel élément était donné par 2^k nombres réels.

Planche 15.
Il est impressionnant, année après année, de constater les ravages que produit un exercice aussi terriblement classique que Nb. Les candidats déduisent le caractère croissant de (u_n) lorsque $u_0 > 4$ du fait que f est croissante sur $[4, +\infty[$; d'une manière générale, ils ont tendance à étudier f à mauvais escient, alors qu'il s'agit souvent de s'intéresser plutôt à $x \mapsto f(x) - x$. Aucun candidat n'a pensé à introduire la suite $v_n = u_n - \ell$, où ℓ est le point fixe pertinent (-1 ou 4 selon les cas), et à étudier son comportement, ce qui pourtant était naturel et assez facile.
L'exercice LY/e était moins classique ; nous avions pris soin de faire en sorte que les deux premières questions soient indépendantes. A la question (2), on ne peut appliquer le théorème du rang car E est de dimension infinie. Il s'agissait de faire une étude directe, ce qu'un seul candidat a su faire pendant l'oral, avec notre aide.

Planche 16.
L'exercice LY/c (en tout cas, ses trois premières questions) est classique. Cependant, ici encore, les étudiants, une fois l'injectivité prouvée, en déduisent le caractère surjectif *via* le théorème du rang, ce qui amène naturellement à une discussion avec le jury sur les hypothèses de ce dernier (la dimension finie) et le fait de savoir si elles sont vérifiées ici ou pas. Une étude directe s'impose et les candidats ont souvent mis du temps à proposer une fonction continue non dérivable. Le traitement de la question (4) a laissé le jury pantois : les candidats procèdent (sans le savoir) par analyse et synthèse et exhibent la forme qu'aurait un vecteur propre associé à λ. Ils s'arrêtent là, sans conclure (sans savoir s'ils ont vraiment conclu ou pas) ; nous sommes alors obligés de leur

faire remarquer qu'une synthèse serait bienvenue. Appelés à la faire, la plupart des candidats ont alors trouvé des vecteurs propres pour tout λ alors que le fait que $\Phi(f)$ vale 0 en 0 empêchait ce fait. Par ailleurs, les candidats ne distinguaient pas selon que λ était nul ou non et divisaient par λ sans se poser de questions.
A la question (1) de l'exercice Pg, une fois (souvent péniblement) rendus à la minimisation de

$$\alpha \longmapsto \big(\alpha + \beta\,\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\big) \ ,$$

les candidats ont eu tout loisir de nous montrer leur manque de recul : deux candidats sur les trois ont prétendu que pour cette fonction soit minimale, il fallait que α le soit, ce qui conduisait au choix $\alpha = 0$. Les tracés que nous demandions de fonctions $x \mapsto (x - x_0)^2$ étaient fantaisistes (mais cohérents avec le raisonnement précédents) : on voyait des paraboles valant x_0^2 en $x = 0$, certes, mais situées au-dessus de la droite $y = x_0^2$. Il a fallu que le jury demande la valeur prise en x_0 pour qu'ils commencent à corriger (mais pas complètement) leur dessin. Pour le reste des questions, et par exemple la question (2), il aurait mieux valu réfléchir à ce qu'il est équivalent de prouver, i.e., le fait que $\big(\tilde{X} - Z\big)(Z - X)$ est d'espérance nulle, plutôt que de développer brutalement tous les carrés sans but précis.

Planche 17.
Certaines questions, pourtant simples, de l'exercice Gd ont plongé les candidats dans des abîmes de réflexion, notamment la détermination du noyau de Φ, qu'aucun des trois candidats n'a su traiter en préparation. C'est d'autant plus étonnant que certains proposaient par ailleurs à la question (3) une représentation matricielle de Φ, sur laquelle on lit clairement la dimension du noyau et à partir de laquelle il est facile de voir par quels éléments il est engendré. Aux questions (2) et (3), malgré l'énoncé suggérant de réfléchir au choix d'une base, tous les candidats se sont précipités sur la base canonique $1, X, X^2, \ldots$ alors que le choix de 1, $X - 1$, $(X - 1)^2$, ... aurait été tellement plus judicieux. Enfin, à la question (3), même et surtout si l'on donne la forme des valeurs propres, il faut être capable de l'exploiter pour voir que 0 et 1 sont valeurs propres doubles dès que $k \geq 4$.
La question (1) de l'exercice RY/b a dérouté les candidats, qui, au mieux, se rendaient compte qu'il y avait indétermination lorsque $t \to 0$. Aucun n'a pensé seul, en préparation, à effectuer un développement limité pour lever l'indétermination. A la question (2), vu la forme de l'inégalité à prouver, il n'est pas raisonnable de penser que le majorant 1 de e^u lorsque $u \leq 0$ va suffire. Pour la question (3), les mêmes problèmes se posent que pour l'exercice LY/d de la planche 2. Pour la question (4), il fallait voir que la condition nécessaire et suffisante pour que ψ_X soit impaire n'était pas $X = -X$ (ce qui entraîne $X = 0$), mais le fait que la loi de X est symétrique. Il fallait en outre être capable de donner un exemple de loi symétrique (on attendait notamment la loi normale).

Planche 18.
Cette planche est un peu atypique au sens où elle a été tirée par trois candidats aux performances très faibles (la meilleure note mise a été 4). La première question de l'exercice Ga a suscité de nombreuses difficultés ; deux candidats sur les trois ont mis plus de cinq minutes à nous expliquer pourquoi lorsque deux coefficients a_j sont égaux alors la matrice n'est pas inversible. C'est parce qu'ils n'arrivaient pas à raisonner autrement qu'en s'efforçant de montrer qu'un certain système d'équations admettait une solution non triviale et qu'ils avaient du mal à voir quelle était cette solution. Celui des trois qui ne procédait pas ainsi avait en revanche du mal à traduire le fait, lors de la preuve de la réciproque, que les colonnes formaient un système lié. A la question (2), les candidats effectuaient un calcul explicite de HC_P et de DH et s'arrêtaient là, sans voir comment l'égalité des deux expressions permettait d'identifier H (ils pensaient sans doute à tort que H était donnée, alors que justement, on voulait la choisir).
L'exercice PiN n'a pas eu davantage de succès. Les candidats ont tous défini $c(\alpha)$ comme étant égal à $i^\alpha\,\mathbb{P}\{X = i\}$ et ont été fort désarçonnés par la question “Mais qui est i ?” Tous ont éprouvé les pires difficultés à nous dire quelles relations vérifiaient les probabilités $\mathbb{P}\{X = i\}$ (caractère positif, somme égale à 1). La série définissant $c(\alpha)$ n'est pas une série géométrique

comme on l'a entendu. Sur le plan des bonnes surprises, le jury a malgré tout constaté que les candidats connaissaient la série harmonique et l'équivalent à $\log n$. A la question (2), on utilisera encore la remarque précédemment formulée selon laquelle il est parfois plus facile de partir du membre de droite d'une égalité à prouver.

Planche 19.
L'exercice Y/e a mis en évidence, une fois de plus, le manque d'aisance des candidats à manipuler les nombres complexes. A deux candidats il a été demandé de tracer le lieu géométrique des e^{ix} lorsque x décrit $\mathbb{R}$; aucun d'eux n'a su effectué rapidement et sans faute ce tracé et le jury a été obligé de contempler des propositions totalement fantaisistes comme le quadrant positif de $\mathbb{R}^2$. A la question (1), heureusement indépendante du reste de l'exercice, aucun candidat n'ayant commencé de calcul en préparation, il a été demandé quels liens (quelles formules) existaient entre le sinus et le cosinus, d'une part, l'exponentielle complexe d'autre part. Les candidats mentionnaient tous la formule de Moivre et mettaient bien plus de temps à penser à celle d'Euler. La méthode et les idées à mettre en œuvre pour résoudre les différentes sous-questions de la question (2) sont globalement bien connues ; il faut dire qu'elles sont très proches de la partie 3 du problème d'écrit de la session 2008. Cependant, leur traitement a pêché par un manque de maîtrise et de recul face aux calculs.
La question (1) de l'exercice Pb a été résolue sans problème par l'ensemble des candidats. Hélas, ceux-ci n'en tiraient pas les conséquences, notamment en termes de dépendance des N_j, et prétendaient à la question (2) que les S_m suivaient elles aussi des lois binomiales. Cela jetait alors rétrospectivement le doute, aux yeux du jury, sur la compréhension profonde du traitement de la question (1) ! Les candidats semblent avoir été déroutés par les notations et ils avaient par exemple du mal à comprendre qu'il était équivalent que $j \in S_m$ et $N_j = m$. Ceux qui s'en sont mieux sortis que les autres étaient ceux qui appréciaient à sa juste valeur notre indication d'exprimer C_m comme une somme de fonctions indicatrices.

Planche 20.
Les candidats ont bien traité (par l'absurde) la question (1) de l'exercice Y/f. A la question (2), prendre quelques instants de réflexion avant de calculer mécaniquement les points critiques aurait permis de voir qu'il y avait une décomposition et une factorisation possibles dans le cas $a \in [0, 1]$, desquelles on déduisait facilement le fait que $(0, 0)$ était l'unique minimum. A la question (2), les candidats ont bien écrit le système d'équation fournit par la caractérisation des points critiques (x, y), mais n'ont pas su en déduire que ceux-ci vérifiaient nécessairement $x = y$ ou $x = -y$. Ils ont admis ce fait et ont continué l'étude, ce qui était une bonne initiative.
Dans GfN, les candidats ont eu du mal à voir que l'application linéaire Φ conservait le degré, ce qui est pourtant une propriété suffisante pour assurer son caractère bijectif, surtout lorsque l'on sait ce qu'est un polynôme de degré 0 (et, éventuellement, que par convention le polynôme nul est de degré $-\infty$). Dans la deuxième partie de la question (1), il était illusoire d'appliquer la formule de dérivation de l'inverse pour calculer Q_k' à partir de l'expression de Q_k en fonction de Φ^{-1}. Ici, comme dans les questions suivantes, il fallait souvent appliquer Φ aux deux membres des égalités à prouver pour en obtenir des formulations équivalentes.