Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice L/a.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$. On note id_E l'endomorphisme identité de E. On considère un endomorphisme u de E tel que

$$u^2 - 2u + \mathrm{id}_E = 0$$

où l'on a noté $u^2 = u \circ u$.

(1) Montrer que u est inversible et calculer son inverse.
(2) Déterminer les valeurs propres de u.
(3) On note k la dimension de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$: prouver que $k \geqslant n/2$.
(4) On suppose dorénavant que $k = n - 1$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $u(e_j) = e_j$ pour $j \leqslant n - 1$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

Question d'oral
Entre les questions (2) et (3) : u est-elle diagonalisable ?

Exercice Na.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le polynôme P_n sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = (x-1)(2-x) + \frac{x^3}{n} .$$

(1) Montrer que pour n suffisamment grand, P_n admet deux extrema relatifs, aux points $r_{1,n} \leqslant r_{2,n}$ avec $r_{1,n} \to \ell$ et $r_{2,n} \sim \gamma n$ pour deux réels ℓ et γ à préciser.
(2) Montrer que pour n suffisamment grand, P_n admet trois racines distinctes notées $a_n < b_n < c_n$.
(3) Montrer que la suite (a_n) ainsi définie est croissante, de limite α à préciser.
(4) En déduire le développement limité

$$a_n = \alpha + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour un réel β à préciser.

Question bonus
Proposer un développement similaire pour les b_n.
Quelle est la forme du développement des c_n ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice LY/d.
On considère les quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 suivantes, définies sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = e^{3x} \ , \quad f_2(x) = e^{-x} \ , \quad f_3(x) = \sin(x) \ , \quad f_4(x) = \cos(x) \ .$$

On note E le sous-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ engendré par f_1, f_2, f_3 et f_4.

(1) Montrer que $\mathcal{B} = \big(f_1, f_2, f_3, f_4\big)$ est une base de E.

(2) On fixe un réel $h > 0$ et on note

$$T_h : \ f \in E \longmapsto T_h(f) = f(\cdot + h)$$

où $f(\cdot + h)$ est la fonction réelle qui à tout x associe $f(x + h)$.
Montrer que T_h est un endomorphisme de E. Donner sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$.
On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \ \cos(b) - \sin(a) \ \sin(b) \ ,$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \ \cos(b) + \cos(a) \ \sin(b) \ .$$

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T_h soit diagonalisable.

(4) Montrer que

$$D : \ f \in E \longmapsto f'$$

définit bien un endomorphisme de E. Trouver un polynôme P tel que $P(D) = 0$.

Exercice PeN.
Soit $Z_1, Z_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $p_1, p_2, \ldots$. On définit
$$Y_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} .$$
On rappelle l'équivalent de Stirling :
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

(1) On suppose d'abord que $p_i = p$ pour tout entier i et pour un $p \in]0,1[$.
Quelles sont les valeurs $\mathcal{Y}_n^*$ les plus probables pour Y_n ?
Pour une suite de $y_n^* \in \mathcal{Y}_n^*$, montrer que $\mathbb{P}(Y_n = y_n^*) \to 0$ quand $n \to \infty$, et donner un équivalent de $\log \mathbb{P}(Y_n = y_n^*)$.
(2) On suppose toujours que $p_i = p$ pour tout entier i. Soit $\varepsilon > 0$.
Quelle est la limite de $\mathbb{P}(y_n^* - \varepsilon \leqslant Y_n \leqslant y_n^* + \varepsilon)$ quand n tend vers l'infini ?
(3) On suppose maintenant que $p_i = 1/(i+1)$.
Quelle est la limite de $\mathbb{P}(y - \varepsilon \leqslant Y_n \leqslant y + \varepsilon)$ en fonction de y ?

Question d'oral
Après (3) : Quelle est la limite de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$? Comment se fait-il alors qu'on ait $Y_n \to 0$ en probabilité ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Y/a.
Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $s > 0$, on définit le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^n$:

$$\Gamma_{n,s} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = s \ \text{ et } \ x_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \right\} ,$$

de même que la fonction

$$f_n : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \longmapsto \ \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \ .$$

On veut étudier le minimum $m(n, s)$ de f_n sur $\Gamma_{n,s}$; il s'agira en particulier de montrer que ce dernier existe bien.

(1) Dans le cas $n = 2$: représenter $\Gamma_{2,1}$, montrer que $m(2, 1)$ existe et en donner sa valeur.
En déduire alors les résultats pour $m(2, s)$, pour tout $s > 0$.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$ et tout $s > 0$, on a l'égalité

$$m(n, s) = \min_{t \in [0,s]} \ t^2 + m(n - 1, s - t) \ .$$

(3) Calculer alors les $m(3, s)$ et $m(4, s)$ pour tout $s > 0$.
Conjecturer l'expression générale des $m(n, s)$ et prouver cette conjecture.

(4) Combien vaut le maximum $M(n, s)$ de f_n sur $\Gamma_{n,s}$?

Question bonus
Comment aurait-on pu mener un raisonnement utilisant le théorème des extrema liés ? (I.e. : énoncer ce dernier, dire rapidement s'il est facile de vérifier ses hypothèses et comment circonvenir à cela sinon.)

Exercice PfA.

Un investisseur a la possibilité d'acheter des parts dans deux entreprises, dont les actions ont un cours aléatoire. Le rendement de la première (respectivement, de la seconde) action est une variable aléatoire X_1 (respectivement, X_2) d'espérance μ_1 (respectivement, μ_2) et de variance σ^2. On note κ la covariance de X_1 et X_2 et on rappelle son expression :

$$\kappa = \mathbb{E}\Big[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\Big] .$$

L'investisseur hésite entre deux stratégies :

- soit investir tout son capital dans une seule action $\varepsilon + 1$, où ε est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p indépendante de (X_1, X_2) ;
- soit répartir son capital en achetant une proportion $1 - p$ de l'action 1 et une proportion p de l'action 2.

On note R_1 et R_2 les rendements respectifs des deux stratégies.

(1) Expliquer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} R_1 &= (1-\varepsilon)X_1 + \varepsilon X_2 , \\ R_2 &= (1-p)X_1 + pX_2 , \\ \mathbb{E}[R_1] = \mathbb{E}[R_2] &= \mu_1 + p(\mu_2 - \mu_1) . \end{aligned}$$

(2) Calculer $\operatorname{Var} R_1$ et $\operatorname{Var} R_2$ puis montrer que

$$\operatorname{Var} R_1 = p(1-p)\,\mathbb{E}\Big[(X_1 - X_2)^2\Big] + \operatorname{Var} R_2 .$$

Que peut-on conseiller à cet investisseur ?

(3) Dans cette question, on suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et de loi commune la loi normale $\mathcal{N}(1.5, \sigma^2)$. Comment choisir p pour minimiser $\mathbb{P}\{R_2 < 1\}$? On rappelle qu'une combinaison linéaire de variables normales indépendantes suit encore une loi normale.

Question d'oral

Pourquoi s'intéresse-t-on à $\mathbb{P}\{R_2 < 1\}$, que mesure cette quantité ?

Question bonus

Pour quelles valeurs de κ la variance de R_2 est-elle minimale / maximale ? Interpréter.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice L/b.
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$. Pour tout réel λ, on définit l'application

$$f_\lambda : \ A = [a_{i,j}]_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ \longmapsto \begin{bmatrix} \lambda & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

(les coefficients non représentés sont tous nuls).

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et λ pour que la matrice $f_\lambda(A)$ soit diagonalisable.
(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que

$$\forall \, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \ .$$

(3) Pour quelles valeurs de λ, l'application f_λ est-elle un endomorphisme ?
Pour ces valeurs, l'endomorphisme f_λ est-il diagonalisable ?

Question bonus
Que dire de l'application g telle que

$$g(A) = \begin{bmatrix} a_{1,n} & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1,n} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} ?$$

Est-ce un endomorphisme, est-elle diagonalisable ?

Exercice R/c

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy standard $\mathcal{C}(0,1)$ lorsqu'elle admet pour densité

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)} .$$

(1) Retrouver par un calcul simple l'expression de la dérivée de la fonction arctan. Etablir également l'égalité suivante : pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

(2) On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{C}(c,1)$ si $X - c$ suit la loi $\mathcal{C}(0,1)$. Montrer que la loi $\mathcal{C}(c,1)$ admet une densité et préciser l'expression de cette dernière.

Montrer que la loi $\mathcal{C}(c,1)$ n'admet pas d'espérance, i.e., que $\mathbb{E}[\,|X|\,] = +\infty$. Comment interpréter c alors ?

(3) Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $\mathcal{C}(0,1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite des

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\pi}{n}\max\{X_1,\ldots,X_n\} \leqslant x\right\}$$

est convergente, de limite à préciser.

Question bonus

Comment interpréter le 1 dans la définition de la loi ? Indication si besoin : calculer $\mathbb{P}\{X \geqslant 1\}$ lorsque $X \sim \mathcal{C}(0,1)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Pa.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Deux joueurs utilisent un dé à n faces (numérotées $1, 2, \dots, n$) pour jouer au jeu suivant :

- le joueur A lance le dé, obtient le résultat X, et verse 3 euros au joueur B ;
- le joueur B lance alors le dé jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale à X (la partie s'arrête alors) ; à chaque lancer, il donne 1 euro au joueur A.

On note Y la somme versée au cours de la partie par le joueur B au joueur A.

(1) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(Y = j \,|\, X = k)$?

(2) Montrer que si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, d'espérance finie, alors
$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant k) \ .$$

(3) En déduire un encadrement simple de $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de n, de même qu'un équivalent lorsque $n \to \infty$.

(4) Selon la valeur de n, à quel joueur le jeu est-il favorable ? On pourra donner une image préliminaire incomplète en utilisant $e^2 \approx 7.39$ et $e^3 \approx 20.09$.

Question bonus

Cas limite $n \to \infty$: tirage uniforme $U \in [0, 1]$, puis $X = k \iff k/n \leqslant U < (k+1)/n$.

Exercice Nc.
Pour tout réel $x \in \,]-1, 1[$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1 - x\cos(t)}\, dt \, .$$

On rappelle que pour tous réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \, ,$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \, .$$

(1) Montrer que

$$\forall\, t \in [0, \pi[, \qquad \cos(t) = \frac{1 - \tan^2(t/2)}{1 + \tan^2(t/2)}$$

et retrouver brièvement la formule

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \, .$$

(2) Montrer que

$$I_0(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = \tan(t/2)$.

(3) En regroupant par exemple $I_{n+2}(x)$ et $I_n(x)$, montrer que

$$xI_{n+2}(x) - 2I_{n+1}(x) + xI_n(x) = 0 \, .$$

(4) Calculer $I_1(x)$, puis $I_2(x)$.

Question d'oral
Avant de commencer, indiquer pourquoi les $I_n(x)$ sont définies.
Question bonus
Comment en déduire la valeur de $I_n(x)$ pour tout n ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Gb.
Soit M une matrice réelle de taille $n \times n$, admettant les valeurs propres
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$$
et symétrique : $M = M^T$.

(1) Montrer que toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres vérifie la propriété suivante, dite d'orthogonalité : pour tous $i \neq j$,
$$e_i^T e_j = 0 \ .$$
On fixe une telle base pour la suite.

(2) Montrer que
$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x}.$$

(3) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$F \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n) \neq \{0\} \ .$$
En déduire que
$$\lambda_k = \min_{\dim F = k} \ \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x} \ ,$$
le minimum portant sur tous les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

(4) Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ fixés, soit N la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ définie par
$$N = \begin{bmatrix} M & x \\ x^T & a \end{bmatrix}.$$
On suppose qu'elle est diagonalisable, de valeurs propres vérifiant
$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n+1} \ .$$
Montrer que
$$\mu_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_{n+1} \ .$$

Exercice Pd.

On étudie le jeu suivant : X_1 et X_2 étant deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, le joueur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2.

(1) Sa première stratégie est de toujours observer X_2. Quelle est alors l'espérance de son gain ?

(2) Dans un deuxième temps, il décide d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leqslant s$, où $s \in [0,1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance. Quelle est son espérance de gain ? Quelle valeur de s doit-il choisir pour la maximiser ?

(3) Si, dans une variante du jeu précédent, il pouvait observer X_1 et X_2 avant de prendre sa décision, quelle serait la meilleure stratégie et combien rapporterait-elle en moyenne ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Y/b.
Soit f une fonction continue $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction F_n de la manière suivante :

$$F_n : \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \int_0^{2\pi} \Big(f(t) - a \cos(nt) - b \sin(nt) \Big)^2 \, dt \ .$$

(1) Calculer, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kt) \, dt \ .$$

(2) Prouver que F_n admet un unique extremum ; on note (a_n, b_n) l'antécédent de ce dernier.
(On rappelle l'extension suivante du théorème des valeurs intermédiaires aux fonctions continues g définies sur $\mathbb{R}^2$: g admet un minimum m_K et un maximum M_K sur tous les pavés de la forme $K = [-A, A] \times [-B, B]$ et prend toutes les valeurs situées entre m_K et M_K.)

(3) Montrer que lorsque f est de classe C^1, les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes, de limite respective à préciser.

Exercice PcN.

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On suppose que X admet des moments d'ordres un et deux et par conséquent, une variance σ^2.

(1) Trouver l'antécédent μ du minimum de $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}\Big[(X-a)^2\Big]$.

(2) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \geqslant 0$,

$$|X-a| - \big|X-(a+h)\big| = \big(\mathbb{I}_{\{X \geqslant a+h\}} - \mathbb{I}_{\{X \leqslant a\}}\big)\, h + r(X)\, \mathbb{I}_{\{a<X<a+h\}} ,$$

où r est une fonction bornée par h.

(3) En déduire que la fonction $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$ est dérivable et préciser sa dérivée. Trouver l'antécédent m du minimum de cette fonction : comment appelle-t-on m ?

(4) Montrer que $|m-\mu| \leqslant \sigma\sqrt{2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Y/c

On commence par le rappel suivant.

Théorème 1. *Soient* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}^2$*,* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$*. Alors* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *par*

$$\varphi(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$*, de dérivée, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\varphi'(t) = u'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big) + v'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big) \ .$$

On considère alors une fonction dérivable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, vérifiant $F(0,0) = 0$ et, pour tous $x,\, y \in \mathbb{R}^2$,

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \ .$$

(1) Déterminer F.
Indication : on pourra fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et considérer $t \in \mathbb{R} \mapsto F(tx,ty)$.

Soit la fonction

$$g :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^4 + y^4} \ .$$

(2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ sauf peut-être en $(0,0)$ et calculer ses dérivées partielles.
g est-elle dérivable en $(0,0)$?

On se propose de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que

$$g(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2\ , \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4} \ .$$

(3) Donner une solution particulière h.
Trouver alors l'ensemble des solutions.

Exercice Gc.
Soient p et q deux réels. On considère le polynôme $P = X^3 + pX + q$. On note a, b et c les trois racines (éventuellement complexes) de P.

(1) En justifiant que $a + b + c = 0$, $ab + ac + bc = p$ et $abc = -q$, montrer que
$$a^2 + b^2 + c^2 = -2p \qquad \text{et} \qquad a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = p^2 .$$
(2) Montrer que $P'(a)P'(b)P'(c) = 4p^3 + 27q^2$.
En déduire que P admet une racine double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.
(3) Montrer que P admet trois racines réelles si et seulement si $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$.
(4) Comment savoir si un polynôme de degré 3 quelconque à coefficients réels admet trois racines réelles, une racine double ?

Question d'oral
Quel est le nom du résultat qui permet de supposer que P est scindé sur $\mathbb{C}$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice R/a.
Soit un réel $\lambda > 0$.

(1) Si (u_n) est une suite telle que $u_n \sim \lambda/n$, montrer que lorsque $n \to \infty$, on a
$$(1-u_n)^n \longrightarrow e^{-\lambda} \ .$$

(2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère des variables aléatoires $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in \,]0,1[$ tel que
$$n\,p_n \longrightarrow \lambda \ .$$
On note S_n leur somme, $S_n = X_{1,n} + \ldots + X_{n,n}$. Montrer la convergence suivante : pour tout entier $k \geqslant 0$,
$$\mathbb{P}\{S_n = k\} \longrightarrow \mathbb{P}\{P = k\}$$
où P est une variable aléatoire de loi à préciser.

(3) A chaque rang n, on considère maintenant une suite infinie $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in \,]0,1[$ tel que
$$n\,p_n \longrightarrow \lambda \ .$$
On définit alors
$$m_n = \frac{1}{n} \inf\big\{i \in \{1,2,\ldots\} : \ X_{i,n} = 1\big\} \ .$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la convergence
$$\mathbb{P}\{m_n \geqslant x\} \longrightarrow \mathbb{P}\{E \geqslant x\}$$
pour une variable aléatoire E de loi à préciser.

Question bonus
Que peut-on dire de
$$M_n = \frac{1}{n} \min\big\{i \in \{1,\ldots,n\} : \ X_{i,n} = 1\big\} \ ,$$
où, par convention, le minimum sur l'ensemble vide au rang n vaut $2n$?

Exercice Y/d

Il s'agit de prouver l'inégalité arithmético–géométrique : pour tout entier $n \geqslant 1$, tous réels positifs $a_1, \ldots, a_n$,

$$(a_1 \times \ldots \times a_n)^{1/n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \ .$$

(1) Montrer l'inégalité lorsque $n = 2$, puis pour tous les entiers de la forme $n = 2^k$.

(2) En déduire alors le cas général.

On propose maintenant l'extension suivante aux nombres complexes.

Soient un entier $n \geqslant 1$ et n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$, que l'on écrit sous la forme polaire $z_j = \rho_j \, e^{i\theta_j}$, avec $\rho_j \geqslant 0$ et dont on suppose qu'il existe une constante $\psi \in [0, \pi/2[$ telle que $\theta_j \in [-\psi, \psi]$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Alors :

$$(\cos\psi) \, |z_1 \times \ldots \times z_n|^{1/n} \leqslant \frac{|z_1 + \ldots + z_n|}{n} \ .$$

(3) Représenter les points $z_1, \ldots, z_n$ dans le plan complexe.

(4) Etablir l'extension.

Question d'oral

A la question (4) : Que pensez-vous de la restriction $\psi < \pi/2$ (toutes choses inchangées par ailleurs) ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Ge.
Soient k et n deux entiers strictement positifs, soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles, et soient $U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ deux matrices quelconques.

(1) Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ de matrice CV. Montrer qu'elle réalise un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(A+UCV)$ sur $\mathrm{Ker}(C^{-1}+VA^{-1}U)$, et que son inverse a pour matrice $-A^{-1}U$.

(2) En déduire que $A+UCV$ est inversible si et seulement si $C^{-1}+VA^{-1}U$ l'est, et qu'alors :
$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1}+VA^{-1}U\right)^{-1}VA^{-1}.$$

(3) Soient x un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $I_n + xx^T$ est inversible, d'inverse à calculer.

Question d'oral
Montrer que $I + x_1x_1^T + \ldots + x_nx_n^T$ est inversible.

Exercice Ph.

Soit X une variable aléatoire à valeur réelle, d'espérance nulle et de variance σ^2 connue. On ignore un certain paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ mais on observe une réalisation de la variable aléatoire $Y = X + \mu$, à partir de laquelle on cherche à construire une variable aléatoire $\widehat{m}$ la plus grande possible, mais inférieure à μ avec probabilité au moins $2/3$; c'est-à-dire que $\widehat{m}$ doit vérifier que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_\mu\left(\widehat{m} \leqslant \mu\right) \geqslant \frac{2}{3} .$$

Ici, on écrit $\mathbb{P}_\mu$ pour indiquer que l'on se place dans le cas $Y = X + \mu$.

(1) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, proposer une première variable aléatoire $\widehat{m}_1$.

(2) Justifier que pour tout $a > 0$,

$$a = \mathbb{E}[a - X] \leqslant \mathbb{E}\Big[(a - X)\,\mathbb{I}_{\{X \leqslant a\}}\Big] \leqslant \sqrt{\mathbb{P}(X \leqslant a)\ \mathbb{E}\Big[(a - X)^2\Big]} .$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(X > a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} .$$

(3) En déduire une seconde, et meilleure, proposition $\widehat{m}_2$.

(4) Si X admet pour densité la fonction $f(x) = e^{-|x|}/2$, que penser de la majoration exhibée à la question (2) ?

Question d'oral

Comment appelle-t-on les intervalles définis à partir de $\widehat{m}$ et contenant μ avec une probabilité d'au moins $2/3$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice LY/b.
Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et f_A la fonction

$$f_A : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \longmapsto \ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \ A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

(1) Déterminer $\operatorname{Ker} A$.
Montrer que f est positive (i.e., que pour tous x, y, on a $f(x, y) \geqslant 0$) et déterminer ses extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, on considère maintenant une matrice réelle $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de taille 2×2 et la fonction $f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui lui est associée par la même formule que ci-dessus.

(2) Montrer que

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_S}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f_S}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \left(S + S^T\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

(3) On suppose désormais que $S = S^T$ et que f_S est positive. Montrer que

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ f_S(x, y) = 0\right\} = \operatorname{Ker} S .$$

(4) Que dire des extrema (locaux et globaux) de f_S dans ce cas ?

Question d'oral
Quel est le nom du vecteur colonne considéré dans le membre gauche de l'équation de la question (2) ?

Exercice R/b.
On considère un investisseur qui au début de chaque année n investit une proportion p de sa fortune en bons du Trésor et le reste dans des actions. Le rendement de ces dernières sur l'année n est donné par un facteur multiplicatif V_n tandis que celui des bons du Trésor est constant et égal à $a > 1$. On suppose que les $V_1, V_2, \dots$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, portée par un intervalle $[v_*, v^*] \subset \,]0,1[$, *id est*,

$$\mathbb{P}\{V_n \in [v_*, v^*]\} = 1 \ .$$

On note F_0 le capital de départ (juste avant la première année d'investissement) et F_n celui obtenu à la fin de l'année n.

(1) Calculer F_n en fonction de F_0, a, p et des $V_1, \dots, V_n$. Déterminer alors $\mathbb{E}[F_n]$ (on pourra introduire un paramètre supplémentaire).
Quelle est la valeur de p maximisant $\mathbb{E}[F_n]$?

(2) Montrer que $n^{-1} \log F_n$ converge en probabilité vers une quantité notée $c(p)$, que l'on précisera.

(3) On considère un réel $v > 0$. Etablir l'encadrement suivant, pour tous $p \in [0,1]$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $p + h \in [0,1]$:

$$\left| \log\Big((p+h)a + (1-p-h)v\Big) - \log\Big(pa + (1-p)v\Big) - \frac{(a-v)\,h}{v + p(a-v)} \right| \leqslant \frac{(a-v)^2}{2\,\min\{a^2, v^2\}}\, h^2 \ .$$

(4) En déduire que la fonction c définie en (2) est dérivable sur $[0,1]$. En déduire des conditions suffisantes pour que le maximum de c soit atteint en $p_0 \in \,]0,1[$.

Question bonus
Montrer que ces conditions peuvent être remplies : exhiber une loi qui les satisfait.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice LY/a.
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

(1) Donner l'ensemble de définition de f. Justifier l'existence d'une suite $(P_k)_{k\geqslant 1}$ de polynômes tels que P_k est de degré k et f admette l'écriture
$$f(x) = P_k(x) + o(x^k) \qquad \text{lorsque} \quad x \to 0 \ .$$
Calculer P_1, P_2 et P_3.

(2) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, le polynôme $P_k(X)^2 - X - 1$ est divisible par X^{k+1}, i.e., que les coefficients associés aux termes de degrés inférieurs ou égaux à k sont nuls.

(3) On fixe ici un entier $n \geqslant 2$. Soit A la matrice de taille $n \times n$ contenant des 1 sur la diagonale et juste au-dessus, et 0 partout ailleurs :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
(où l'on n'a écrit que les termes non nuls). Montrer l'existence d'une matrice B telle que $B^2 = A$.
Calculer explicitement B lorsque $n = 4$.

Question d'oral
Que peut-on dire de $P_{k+1} - P_k$? Par exemple : cette différence prend-elle une forme particulièrement simple ?

Exercice RY/a.
On veut étudier la quantité

$$R(k,\ell) = \log \frac{\max_{p\in[0,1]} p^k(1-p)^\ell}{\int_{[0,1]} p^k(1-p)^\ell \, dp}$$

pour tout couple d'entiers $k, \ell \geqslant 0$.

(1) Montrer que $R(k,\ell)$ est bien définie pour tous k et ℓ.
Prouver que le maximum définissant le numérateur est bien atteint et calculer sa valeur en fonction de k et ℓ.

(2) On note $\gamma_{k,\ell}$ le dénominateur : calculer $\gamma_{k,0}$ et $\gamma_{0,\ell}$.

(3) Etablir une relation entre $\gamma_{k,\ell}$ et $\gamma_{k-1,\ell+1}$ et en déduire que pour tous k et ℓ,

$$\gamma_{k,\ell} = \frac{1}{(k+\ell+1)\, C_{k+\ell}^{\ell}} \, .$$

(4) En déduire que $R(k,\ell) \leqslant \log(k+\ell+1)$.

Question bonus
La borne de la question (4) est-elle atteinte par certains couples (k,ℓ) ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Ne.

(1) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ on a l'encadrement :
$$\frac{-x}{1-x} \leqslant \log(1-x) \leqslant -x.$$
(2) Représenter sur un même graphe les fonctions
$$x \mapsto \frac{-x}{1-x}\,, \qquad x \mapsto \log(1-x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto -x$$
sur l'intervalle $[0,1[$.

(3) Montrer que la suite des
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{n}$$
converge et déterminer sa limite.

Question d'oral

Quel encadrement sur la limite (supposant qu'elle existe) aurait donné une comparaison série–intégrale ?

Exercice RY/c.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, de dérivée seconde notée f'' telle que $f'' \geqslant 0$. On veut montrer que pour tous réels x et y et pour tout $p \in [0,1]$, on a

$$f\big(px + (1-p)y\big) \leqslant p\, f(x) + (1-p)\, f(y) \ .$$

Il suffit évidemment de prouver ce résultat pour $x < y$ et $0 < p < 1$, deux hypothèses que l'on fait dans la suite. On note $z = px + (1-p)y$.

(1) Construire explicitement un polynôme P_z de degré 2 tel que

$$P_z(x) = 0 \ , \qquad P_z(y) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_z(z) = 1 \ .$$

(2) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que

$$Q(x) = f(x) \ , \qquad Q(y) = f(y) \qquad \text{et} \qquad Q(z) = f(z) \ .$$

(3) Montrer que la fonction $f - Q$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde s'annule au moins une fois.
Conclure alors à l'inégalité recherchée.

(4) Application : Soit X une variable aléatoire réelle admettant un nombre fini de valeurs, montrer que

$$f\Big(\mathbb{E}[X]\Big) \leqslant \mathbb{E}[f(X)] \ .$$

Question d'oral
Leur faire prononcer les mots de polynômes de Lagrange.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice L/c

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$. Dans cet espace, on note 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité.

On considère une application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante et telle que pour tous A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \ .$$

On veut établir l'équivalence : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\varphi(M) \neq 0$.

(1) Déterminer $\varphi(I_n)$. Etablir alors le sens direct de l'équivalence.

(2) Une matrice M est dite nilpotente s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0_n$. Déterminer la valeur de $\varphi(M)$ pour une telle matrice.

(3) Prouver alors le sens réciproque. (On pourra penser à utiliser des matrices équivalentes.)

Exercice Nd.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et bornées sur l'intervalle $[0,1[$. On considère l'application

$$(f,g) \in \mathbb{E}^2 \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ .$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on note $\mathcal{E}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des fonctions constantes sur chaque intervalle de la forme $[j2^{-k},(j+1)2^{-k}[$, où $j \in \{0,\ldots,2^k-1\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{E}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, et donner sa dimension.

(2) Pour un ensemble A, on définit la fonction $\mathbb{I}_A$ par les relations $\mathbb{I}_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $\mathbb{I}_A(x) = 0$ pour $x \notin A$. On pose alors :

$$f = \mathbb{I}_{[0,1[}\ , \quad g = \mathbb{I}_{[0,1/2[} - \mathbb{I}_{[1/2,1[}$$

et pour $\ell \geqslant 0$ et $j \in \{0,\ldots,2^\ell-1\}$,

$$g_{\ell,j}:\ x \in [0,1[\ \longmapsto 2^{\ell/2}\, g(2^\ell x - j)\ .$$

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $g_{\ell,j}(x)$ est non nul ?

(3) Montrer que les éléments de

$$\mathcal{B} = \{f\} \cup \bigcup_{\ell=0}^{k-1} \{g_{\ell,0},\ \ldots,\ g_{\ell,2^\ell-1}\}$$

définissent une base de $\mathcal{E}_k$ telle que

$$\forall\,(g,h) \in \mathcal{B}^2, \qquad \langle g,h\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h,\\ 0 & \text{si } g \neq h.\end{cases}$$

(4) Soit $\delta \in\ ]0,1[$ et soit

$$\mathcal{H}_\delta = \Big\{ f \in \mathcal{E} :\ \forall\,(x,y) \in [0,1]^2,\ \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant |x-y|^\delta \Big\}.$$

Montrer que si $f \in \mathcal{H}_\delta$, alors, pour tout entier $k \geqslant 0$, et tout $j \in \{0,\ldots,2^k-1\}$,

$$\langle f, g_{k,j}\rangle \leqslant 2^{-k(\delta+1/2)-\delta-1}\ .$$

Question d'oral
Donner une base de $\mathcal{E}_k$.

Question bonus
Candidats en difficulté : montrer que les fonctions de $\mathcal{H}_\delta$ sont continues ; que valent-elles lorsque $\delta > 1$?

Candidats avancés : en quel sens a-t-on

$$\sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=0}^{2^\ell-1} \langle f, g_{l,j}\rangle\, g_{l,j} \longrightarrow f$$

quand k tend vers l'infini ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Nb.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n^2 - 4) \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$$

(1) Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?
(2) Etudier la convergence de (u_n) quand $u_0 > 4$, puis quand $u_0 \in [-3/2, -1/2]$.
(3) Existe-t-il des valeurs $u_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite (u_n) ne prend que deux valeurs distinctes ?

Question bonus
Etudier la stabilité dans $\mathbb{C}$ du 2–cycle correspondant (attractif ou pas).

Exercice LY/e

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$ et T l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction Tf définie de la manière suivante : pour tout $x \in [0,1]$,

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) .$$

(1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer une expression explicite simple de $T^n = T \circ \ldots \circ T$, l'itérée n fois de T.

(2) Justifier brièvement que T est un endomorphisme.
T est-il injectif ?

(3) Déterminer ses valeurs propres λ telles que $|\lambda| \geqslant 1$, ainsi que les sous-espaces propres associés.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice LY/c.
On note $C^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit l'application Φ sur $C^0(\mathbb{R})$ de la manière suivante : l'image de $f \in C^0(\mathbb{R})$ est la fonction $g = \Phi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

(1) Montrer que Φ est un endomorphisme.
(2) L'application Φ est-elle surjective, injective ?
(3) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que $g' = \gamma g$ si et seulement s'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \delta\, e^{\gamma x}\ .$$

On pourra considérer à cet effet des fonctions de la forme $g(x)\, e^{-\gamma x}$.
(4) On dit que f est un vecteur propre de Φ si f n'est pas la fonction nulle et qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé valeur propre) tel que $\Phi(f) = \lambda f$. Déterminer les vecteurs et valeurs propres de Φ.

Exercice Pg.
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles, non constantes. On observe Y mais pas X, et s'intéresse aux prédicteurs linéaires $\tilde{X}$ construits à partir de Y, de la forme

$$\tilde{X} = f_{\alpha,\beta}(Y) = \alpha + \beta Y \ .$$

On note $R(\alpha, \beta) = \mathbb{E}\Big[\big(f_{\alpha,\beta}(Y) - X\big)^2\Big]$, et on cherche le point (α^*, β^*) qui minimise $R(\alpha, \beta)$.

(1) En considérant $\mathrm{Var}(\tilde{X} - X)$, déterminer la valeur α_β de α minimisant, à β fixé, la quantité $R(\alpha, \beta)$. En déduire que

$$\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} R(\alpha, \beta) = \min_{\beta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big[\big(g_\beta(Y) - X\big)^2\Big] \ ,$$

où $g_\beta(Y) = \mathbb{E}[X] + \beta\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)$.

(2) Montrer que si $Z = g_z(Y)$ est un prédicteur linéaire tel que $\mathrm{Cov}(X - Z, Y) = 0$, alors pour tout autre prédicteur linéaire $\tilde{X} = g_\beta(Y)$ on a l'égalité :

$$\mathbb{E}\Big[\big(\tilde{X} - X\big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\big(\tilde{X} - Z\big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[(Z - X)^2\Big] \ .$$

(3) En déduire que le prédicteur linéaire optimal au sens des moindres carrés est donné par α^* et β^* tels que

$$X^* = \mathbb{E}[X] + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(Y)}\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big) \ ,$$

puis calculer le minimum de $(\alpha, \beta) \mapsto R(\alpha, \beta)$.

(4) On lance deux dés : on observe leur somme, et on cherche à estimer la valeur du premier lancer. Que peut-on proposer ?

Question bonus
A poser n'importe quand au cours de l'oral : que peut-on dire si X et Y sont indépendantes (ou non corrélées) ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Gd.

Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P(X)$ associe le polynôme

$$\Phi(P) = P(X) - (X-1)\,P'(X) + \frac{(X-1)^2}{2} P''(X)\ .$$

(1) Pour tout entier positif k, montrer que Φ définit un endomorphisme sur l'espace $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes de degré au plus k. Déterminer son noyau.

(2) On se place dans cette question uniquement dans le cas $k = 2$: proposer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice de Φ dans cette base.

(3) Quelles sont, en fonction de k, les valeurs propres de Φ ?

Question bonus

Aux moments idoines : donner l'image de Φ ; et, pour vérification : Φ est-elle diagonalisable, si oui, dans quelle base ?

Exercice RY/b.
Dans cet exercice, on ne considère que des variables aléatoires discrètes, i.e., prenant un nombre fini $x_1, \dots, x_k$ de valeurs avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_k$. Pour une telle variable aléatoire X, on définit

$$\psi_X : \ t \in \mathbb{R}^* \ \longmapsto \ \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\Big[e^{tX}\Big] \ .$$

(1) Montrer que ψ_X admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ et que ce dernier est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

(2) Prouver que lorsque tous les x_j sont négatifs : $x_j \leqslant 0$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \psi_X(t) \leqslant \mathbb{E}[X] + \frac{t}{2}\,\mathbb{E}\Big[X^2\Big] \ .$$

On pourra commencer par exhiber un majorant de e^u lorsque $u \leqslant 0$.

(3) Démontrer que lorsque X et Y sont deux variables aléatoires discrètes alors $\psi_X = \psi_Y$ si et seulement si X et Y ont même loi (i.e., mêmes x_j et mêmes p_j avec les notations de l'introduction).
On pourra montrer au préalable que pour tous réels $y_1, \dots, y_n$, la famille formée par les n fonctions $t \mapsto e^{y_j t}$ est libre.

(4) Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur X pour que ψ_X soit impaire. Faire ensuite de même pour le cas ψ_X paire.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Ga.
Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. On appelle matrice de Vandermonde des $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que la matrice de Vandermonde des $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est inversible si et seulement si les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux distincts.

Soit $P = X^n + c_1X^{n-1} + c_2X^{n-2} + \cdots + c_{n-1}X + c_n$ un polynôme à coefficients réels admettant des racines toutes réelles et toutes distinctes. Soit

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_1 \end{pmatrix},$$

et soit D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines de P.

(2) Montrer qu'il existe une matrice H de Vandermonde telle que $HC_P = DH$.
(3) Quelles sont les valeurs propres de C_P ?

Question bonus
A quelle condition une matrice de Vandermonde M est-elle orthogonale, i.e., vérifie-t-elle $M^{-1} = M^T$?

Exercice PiN.

Soit un réel $\alpha > 1$ et soit $X_1, \dots, X_n$ un n–échantillon de variables aléatoires à valeurs entières strictement positives, de loi commune celle de la variable aléatoire X suivante :

$$\forall\, i \geqslant 1, \qquad \mathbb{P}\{X = i\} = \frac{c(\alpha)}{i^\alpha}\ ,$$

où $c(\alpha)$ est choisi judicieusement.

(1) Exprimer $c(\alpha)$ à l'aide d'une série. Pour quelles valeurs de α la variable X admet-elle une espérance finie ?

(2) On note $C_n = \mathrm{Card}\,\{X_1, \dots, X_n\}$ le nombre de valeurs différentes dans l'échantillon $X_1, \dots, X_n$; montrer que

$$\mathbb{E}[C_n] = \sum_{i=1}^{\infty} 1 - \left(1 - \frac{c(\alpha)}{i^\alpha}\right)^n\ .$$

(3) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1 - \exp(-u)}{u^{1+1/\alpha}}\, du$$

est convergente.

(4) On définit

$$A(\alpha, n) = \int_0^{nc(\alpha)} \frac{1 - \exp(-u)}{u^{1+1/\alpha}}\, du\ .$$

Montrer que

$$\mathbb{E}[C_n] \geqslant \frac{A(\alpha, n)}{\alpha}\, (c(\alpha)n)^{1/\alpha}\ .$$

On pourra utiliser l'inégalité $(1-x)^n \leqslant \exp(-nx)$ en précisant pour quelles valeurs de x elle est vraie.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Y/e
On appelle polynôme trigonométrique de degré $n \in \mathbb{N}$ toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme suivante : il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \ .$$

(1) Montrer que lorsqu'un tel polynôme trigonométrique f de degré $n \geqslant 1$ s'annule en $2n+1$ points distincts de $[0, 2\pi[$, alors c'est la fonction nulle, et qu'en particulier, $a_k = b_k = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$.
Indication : on pourra commencer par se ramener à un polynôme adéquat en e^{ix} de degré $2n$.

On veut montrer l'inégalité suivante (inégalité de Bernstein) : pour tout polynôme trigonométrique f de degré $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leqslant n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \ .$$

Pour $n \geqslant 1$, on va utiliser à cet effet un raisonnement par l'absurde.

(2) On suppose dans un premier temps que f vérifie l'égalité et l'inégalité stricte suivantes :

$$f'(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| > n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

et on définit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f'(0)}{n} \sin(nx) - f(x) \ .$$

  (a) Montrer que g s'annule au moins $2n$ fois sur $[0, 2\pi[$. On pourra considérer les points de la forme $(2k+1)\pi/(2n)$.
  (b) Montrer que g' s'annule au moins $2n-1$ fois sur $]0, 2\pi[$ et donc $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi]$.
  (c) Montrer que $g''(0) = 0$ et que g'' s'annule également $2n$ fois sur $]0, 2\pi[$. En déduire une contradiction.

(3) Etablir alors l'inégalité de Bernstein.

Question d'oral
Question (1) : a-t-on nécessairement $a_0 = b_0 = 0$?
Si le candidat n'y pense pas spontanément, au niveau de la question (3) : l'inégalité est-elle vraie lorsque $n = 0$?

Exercice Pb.
On fixe un entier $k \geqslant 2$ et une loi de probabilité $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ sur $\{1, \dots, k\}$. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon $\mathbf{p}$.

(1) Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on définit N_j comme le nombre de X_t égaux à j :
$$N_j = \mathrm{Card}\big\{t \in \{1, \dots, n\} : \quad X_t = j\big\} \ .$$
Préciser la loi de chaque N_j.
Les variables aléatoires $N_1, \dots, N_k$ sont-elles indépendantes ?

(2) Pour les $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit alors S_m comme l'ensemble des nombres apparaissant exactement m fois dans l'échantillon $X_1, \dots, X_n$:
$$S_m = \big\{j \in \{1, \dots, k\} : \quad N_j = m\big\} \ .$$
A partir de chaque S_m, on définit deux variables aléatoires :
$$C_m = \mathrm{Card}\, S_m \qquad \text{et} \qquad M_m = \sum_{j \in S_m} p_j \ .$$
Calculer $\mathbb{E}[C_m]$ et $\mathbb{E}[M_m]$ en fonction de $\mathbf{p}$, n, k et m.

(3) Montrer que pour tout $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a
$$\mathbb{E}[M_m] = \frac{m+1}{n-m} \Big(\mathbb{E}[C_{m+1}] - \mathbb{E}[M_{m+1}]\Big) \ .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Il vous rappelle que c'est à vous de gérer le temps durant la présentation orale.

Exercice Y/f

On étudie la fonction suivante :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2a\,xy \ ,$$

pour un paramètre $a \geqslant 0$.

(1) La fonction f admet-elle un maximum global ?

(2) Dans les cas $a = 0$ et $a = 1$, montrer que f admet un unique minimum global, à déterminer.
Montrer que cela est vrai en fait pour tout $a \in [0, 1]$.

(3) On se place désormais dans le cas $a > 1$. Montrer que si un minimum global existe, alors nécessairement il est sur la diagonale ou l'anti-diagonale de $\mathbb{R}^2$, *id est*, dans l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} \ .$$

En déduire trois points candidats possibles.

(4) Montrer finalement l'existence d'un minimum global et donner sa valeur.
On pourra commencer par montrer que $f(x, y) \geqslant 0$ en dehors du disque (fermé) de rayon a et de centre $(0, 0)$ et appliquer l'extension suivante du théorème des valeurs intermédiaires aux fonctions continues g définies sur $\mathbb{R}^2$: g admet un minimum m_K et un maximum M_K sur tous les disques (fermés) centrés en $(0, 0)$ et de rayon $K \in \mathbb{R}_+$.

Question d'oral

Comment traiter le cas $a \leqslant 0$?

Exercice GfN.
Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \phi(P) = \frac{1}{2}\Big(P(X) + P(X+1)\Big)\ .$$

(1) Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Dans la suite, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on note

$$Q_k(X) = \phi^{-1}\Big(X^k\Big)\ .$$

(2) Calculer Q_0, Q_1 et Q_2. Montrer que $Q_k' = k\,Q_{k-1}$.

(3) Prouver que

$$Q_k(X+1) - Q_k(X) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} Q_j$$

et en déduire que

$$Q_k = X^k - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} Q_j\ .$$

(4) Calculer Q_3 et Q_4.

Question bonus
Montrer que $Q_k(1-X) = (-1)^k Q_k(X)$. En déduire que Q_k est divisible par $2X-1$ si k est impair, et par $X(X-1)$ si k est pair.