MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Patricia Reynaud-Bouret, Gilles Stoltz

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (le candidat n'a pas le choix de la planche mais peut traiter les exercices et les exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

Commentaires généraux

Nous avons été très satisfaits du niveau général des candidats ayant passé la barre des écrits ; à vrai dire, nous avons même cru sentir, comme à l'écrit, un frémissement du niveau, vers le haut. C'est un éloge suffisamment inhabituel dans un rapport de jury pour être noté ! En conséquence, nous avons placé le plancher des notes à 2 cette année (1 toutes les années précédentes).

Nous avons essayé de balayer pendant cette session d'oral tous les éléments du programme, et en particulier ceux qui n'avaient pas été abordés à l'écrit (notamment, systèmes d'équations, intégration, suites et séries, développements limités, fonctions de deux variables, extrema liés, loi des grands nombres et théorème de la limite centrale). Encore une fois, conformément à la volonté que nous avions affichée lors des réunions avec les professeurs de classes préparatoires, nous avons voulu interroger sur le programme, tout le programme, et rien que le programme, et nous nous félicitons de l'avoir fait. Nous encourageons préparateurs et candidats à prendre un peu de temps pour bien cerner la liste limitative des notions à connaître.

Le dit programme semble bien maîtrisé dans son ensemble, avec plus ou moins de succès, par la plupart des candidats. Nous n'avons pas eu affaire à des impasses flagrantes et massives comme cela a été le cas les années précédentes, seulement à des cas isolés d'absence de travail sérieux dans la discipline. L'appel à des notions hors-programme est quasiment absent des planches d'oral ; à l'écrit, ce sont dans l'immense majorité des copies très faibles qui recourent à des notions hors-programme (déterminant, polynômes annulateurs) pour résoudre de manière compliquée des choses simples, or, à l'oral, le niveau typique constaté est largement supérieur à celui de l'écrit.

Nous avions anticipé et parié sur davantage d'aisance à l'oral et avions préparé des planches plus difficiles en moyenne que les années précédentes, mais également de niveaux plus homogènes ; il s'agit en réalité d'un alignement de difficulté sur les planches les moins faciles des années précédentes, une sorte de nivellement par le haut. Cela a convenu parfaitement aux meilleurs étudiants, et pour les autres, nous avons évidemment tenu compte de la longueur des sujets, et nous attendions essentiellement à ce que les premières questions de chacun des deux exercices soient traitées. Bien évidemment, nous avons proposé des indications ou éléments de réponse à chaque fois qu'un étudiant était bloqué et ne manifestait pas le désir de sauter la question pour présenter ses résultats aux questions suivantes.

A cet égard, nous tenons à rappeler que c'est également aux candidats de gérer le temps. Cela va de soi pour eux dans les autres disciplines, mais ce n'est que le fait d'une minorité (les meilleurs) en mathématiques. La plupart des candidats se laissent ainsi porter par le *tempo* du jury ; nous pensons heureusement à leur demander assez rapidement la liste des questions qu'ils ont traitées dans l'exercice en cours, pour savoir s'il y a lieu de résoudre ensemble une question devant laquelle ils sont restés impuissants ou s'il vaut mieux la sauter dans un premier temps pour s'intéresser aux suivantes. Mais nous apprécions lorsqu'un candidat porte avec nous le souci de la gestion du temps et propose de lui-même de passer à une autre question. Cependant, le jury dispose : cela n'empêche évidemment pas que nous interdisions de passer à la suite si, par exemple, on a affaire à une question de cours et que nous voulions de toute façon sonder les connaissances du candidat sur un thème donné.

De même, nous apprécions qu'on nous présente de manière claire et concise les résultats obtenus en préparation ; en particulier, lorsque la question est facile (ce qui est presque toujours le cas d'au moins la première question de chaque exercice), il est inutile de fournir un luxe de détails et de rallonger la résolution en écrivant tous les éléments au tableau ; s'agissant d'un oral, on peut dire avec clarté les arguments ou même simplement indiquer la méthode (si le reste de l'exercice a été résolu ou presque et est bien plus intéressant à regarder ensemble), à charge pour le jury de demander des précisions écrites, sur l'instant ou plus tard, s'il a un doute sur la manière dont le raisonnement a été mené. Cela permet de dégager du temps pour les questions plus difficiles. Il ne sert à rien de jouer la montre et de traîner plus que de raison sur la présentation de questions que l'on a résolues en préparation : les questions non abordées, en préparation ou à l'oral avec le jury, comptent comme non résolues. Nous nous chronométrons lors de la réalisation des planches et équilibrons, à quelques exceptions près, la longueur des planches. Par défaut, une planche doit donc être considérée comme pouvant être résolue en bonne partie lors de la préparation et du passage (mais le seul temps de préparation ne suffit en revanche pas, le plus souvent).

Nous répétons ce que nous avons écrit l'an dernier, que l'épreuve orale n'étant pas un écrit *bis*, il est tenu grand compte de la réactivité des candidats aux indications du jury. On peut tout à fait rattraper une mauvaise préparation par un bon passage, cela s'est vu souvent. Cette année, comme les précédentes, a vu se succéder à l'oral trois catégories de candidats ; la première, formée de 27 étudiants, dont les notes sont supérieures ou égales à 9, dispose d'une habileté mathématique certaine et d'une bonne connaissance du cours. La deuxième, qui recueille les 17 candidats dont les notes se situent entre 6 et 8, regroupe ceux qui sont habiles mais ne connaissent pas leur cours, ou l'inverse. Enfin, le troisième groupe, soit 11 étudiants, rassemble tous ceux qui ont décidé un jour que les mathématiques n'étaient pas leur fort et qui ne connaissent même pas les résultats les plus fondamentaux du cours de classes préparatoires.

Enfin, du côté matériel, nous sommes toujours satisfaits de la limitation du nombre d'auditeurs à six personnes par oral, qui cette année encore a permis un étalement du public sur l'ensemble de la session et n'a surpris que quelques groupes compacts d'hypokhâgneux ; il n'y a presque pas eu d'oral sans spectateurs. Les auditeurs ont continué d'être surpris par la disposition des chaises sur le côté de la salle mais cela permet au candidat de fixer le jury et de ne pas être déstabilisé par le public (et ses mimiques).

Commentaires plus spécifiques

Planche 1. Dans l'exercice 1, les candidats ont tous donné une expression de la fonction de répartition sans préciser son domaine de validité (les réels positifs en l'occurrence) et en oubliant d'ajouter qu'elle était nulle pour les réels négatifs ; aucun candidat ne pense à se servir des développements limités lors du calcul de la limite G, même lorsque nous leur demandons de retrouver la limite de $(1+u/n)^n$ pour $u \geq 0$, une limite dont nous sommes pourtant sûrs qu'ils l'ont vue en cours. L'exercice 2 a montré que le calcul par blocs était désormais plus naturel aux candidats ; ils ont cependant souvent utilisé des caractérisations d'existence d'une valeur propre qui donnaient lieu à des solutions plus longues et plus compliquées que la caractérisation en termes de rang non plein de la matrice $M - xI_{2n}$, pour x réel. Il faut vraiment qu'ils aient de nombreuses manières de procéder en tête et sachent en choisir une idoine selon l'exercice.

Planche 2. Dans l'exercice 1, il ne fallait évidemment pas oublier de commencer par indiquer pourquoi la suite (u_n) était bien définie (cf. également commentaires sur la planche 5 de la session 2007). La preuve de la divergence vers $+\infty$ a donné lieu à un florilège de raisonnements très approximatifs (avec le critère de d'Alembert, ou avec un raisonnement par l'absurde commençant par l'existence d'une limite finie). La question 2 de l'exercice a montré que les candidats ignoraient encore souvent la signification de la somme directe $\oplus$, comme somme de sous-espaces, dont l'intersection est réduite à l'élément nul (et non pas, est vide).

Planche 3. L'exercice 1 n'a posé de problème qu'à la question 3 où les candidats ont été désemparés devant le fait que n ne soit plus fixé. Leurs conditions dépendaient de n et de R, sans qu'il soit fait le lien que n était le degré de R ; personne n'a su énoncer la bonne condition avec la plus grande économie de mots possibles : "$R(0) = 0$". L'exercice 2 était assez calculatoire, et nous avons eu la très heureuse surprise qu'une candidate mène les calculs parfaitement jusqu'au bout et trouve la bonne limite, 4, à la dernière question.

Planche 4. Les trois premières questions de l'exercice 1 ont été très bien traitées, à part le fait d'une candidate qui a cherché les valeurs propres après avoir multiplié la matrice par un scalaire sans répercuter cette opération sur le résultat final. Mais le cas général étudié à la question 4 a déconcerté beaucoup de candidats. Nous les avons fait procéder en ordre en leur demandant s'ils ne pensaient pas à une valeur propre simple (ils répondent 0) et en leur demandant de calculant sa multiplicité (ils trouvent $n - 1$, ce que nous acceptons dans un premier temps). Un seul a pensé que la trace donnait alors l'unique autre valeur propre éventuelle. L'exercice 2 a montré que les candidats étaient à l'aise avec les extrema liés ; aucun n'a cependant choisi d'appliquer directement le théorème des extrema liés et tous se sont ramenés à une fonction à deux variables, dont ils ont calculé le point critique. La plupart a eu du mal à réaliser que ce point critique n'était pas nécessairement l'antécédent d'un extremum global, et qu'il fallait encore fournir un petit travail si l'on voulait procéder ainsi.

Planche 5. Pour deux candidats sur les trois, le maniement des développements limités relève de la cuisine ; ils ont éprouvé les pires difficultés à traiter, ou même simplement à penser, au développement limité du dénominateur et à le faire basculer en une expression facteur du développement limité du numérateur. Le troisième candidat avait calculé le bon développement limité pendant la préparation, $x - x^3/3 + o(x^3)$, et après l'avoir rapidement interrogé sur la méthode, nous avons passé aux questions suivantes ; ce temps précieux dégagé lui a permis de résoudre avec nous des questions sur lesquelles il avait buté pendant sa préparation. Il ne faut en aucun cas prendre 10 minutes, comme on l'a vu deux fois, pour présenter la première question de l'exercice 2 ; il faut réaliser, comme l'a fait le troisième candidat, qu'elle est destinée à se lancer, que ce sont les questions suivantes qui sont importantes, et que par conséquent, il faut en faire une présentation complète mais dynamique. (*Nota :* cette question, comme la première question de tous les exercices utilisant la trace, était surtout destinée à introduire cet opérateur qui ne figure pas explicitement mais implicitement au programme, et dont nous savons bien qu'il est vu en cours.) A la question 3(b), les mêmes problèmes qu'à la planche 2 sont réapparus concernant la somme directe $\oplus$.

Planche 6. Pour l'exercice 1, les étudiants ne sont pas assez conscients qu'une primitive n'est définie qu'à une constante près, et qu'ici, il fallait recoller bout à bout les primitives en utilisant des propriétés de continuité aux recollements. La seconde partie de la question 1 de l'exercice 2 a laissé pantois deux des trois candidats, qui n'ont pas même pensé au théorème du rang. Pour tous, son application a posé problème au moment de calculer le rang de ψ, personne ne voyant qu'il y avait deux valeurs possibles, 0 et 1, et qu'il fallait donc expliquer pourquoi (même si c'est facile à voir) le rang était 1.

Planche 7. A l'exercice 1, le jury a posé à tous les candidats la question subsidiaire "g est-il un endomorphisme ?" et a toujours entendu "Non, parce que les espaces de départ et d'arrivée sont différents", ce qui est une réaction naturelle. Mais bien sûr, il a alors été demandé si vraiment g arrivait dans E ou dans un espace plus petit. Le délai mis pour réaliser que g était bien un endomorphisme était révélateur du niveau des candidats. Nous avons souvent en réserve une question surprise, surtout pour les exercices faciles ; nous la posons à tous les candidats au même moment de l'oral. A l'exercice 2, les questions 4(a), 4(b) et 5 ont posé tout un lot de problèmes, notamment le traitement d'extrema liés comme s'ils étaient libres et l'absence de distinction entre extrema globaux et locaux. Les questions 4(b) et 5 sont difficiles et nous n'attendions absolument pas qu'elles soient abordées pendant la préparation ; pendant le passage, elles nous permettaient de tester l'intuition des candidats.

Planche 8. La question 3 de l'exercice 1 a donné lieu à des calculs fastidieux, souvent par récurrence, alors qu'il suffisait d'appliquer une formule comme $(a_1 + \ldots + a_n)^2 = \sum_i a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j$. Aucun candidat n'a fait le lien entre la question 4 et la question 5 ; tous ont parlé de la loi des grands nombres, un seul en connaissant le bon énoncé et les bonnes hypothèses. Couper S_n en somme des indices pairs et impairs permettaient effectivement de prouver la convergence, mais aucun candidat ne l'a vu seul. La question 3 de l'exercice 2 n'a été résolue par aucun candidat, parce que personne n'a su traduire l'énoncé, et en particulier, écrire la matrice B correctement. (Cet exercice testait les capacités d'abstraction et de modélisation, fort utiles en économie ; cf. également l'exercice 2 de la planche 4.)

Planche 9. Comme remarqué lors de la correction du sujet d'écrit, les étudiants ne connaissent pas la condition nécessaire et suffisante de convergence des séries géométriques $\sum q^n$, qui est $|q| < 1$ et non pas $|q| \leq 1$. Cela a rendu très difficile et pénible pour le jury le traitement des cas $x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ aux questions 1 et 2 de l'exercice 2. Les mathématiques sont une science exacte, et traitent tous les cas, même les cas particuliers ; ici, comme dans d'autres planches, les étudiants se concentrent souvent sur un cas général où tout se passe bien et oublient les bords ou autres points particuliers. La question 3 a beaucoup surpris les candidats, qui indiquaient $S(0)$ comme limite, à croire qu'ils pensent que toutes les fonctions sont continues alors que S ne l'est visiblement pas. L'exercice 2, bien que difficile, a été très bien traité par deux candidats. Nous les avons guidés pour qu'ils voient comment se dispenser du calcul des vecteurs propres autres que celui associé à 1 (et de même, de celui de la matrice de passage) ; la question 5, bien prise, est très peu calculatoire.

Planche 10. A l'exercice 1, il est très inquiétant de constater qu'aucun candidat n'a réalisé pourquoi l'énoncé passait par des sommes partielles en fixant N ; tous ont échangé somme dénombrable sur n et intégration comme si de rien n'était et nous avons souvent eu toutes les peines du monde à leur faire réaliser pourquoi cela n'était *a priori* pas justifié. L'exercice 2 a montré que deux candidats sur les trois ne savaient pas énoncer correctement la loi des grands nombres, et encore moins le théorème de la limite centrale (énoncer, même pas appliquer). Un tel manquement est peu pardonnable et d'autant plus surprenant que la planche 8 révélait déjà ce fait, alors même que le rapport de l'an dernier félicitait les candidats pour la très bonne connaissance de ces deux théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités.

Planche 11. La question 2 de l'exercice 1 s'est révélée redoutable, malgré l'indication de considérer une variable aléatoire Y indépendante et de même loi que X et d'utiliser la question 1. Les candidats se sont un peu noyés dans leurs calculs à l'exercice 2, mais nous avons pu constater que les nombres complexes étaient bien manipulés et qu'en général, les candidats se repéraient bien sur le cercle trigonométrique. Cependant, par manque de temps ou plus vraisemblablement d'aisance, les questions 3 et 4 n'ont pas été abordées.

Planche 12. Dans question 1 de l'exercice 1, si l'on ne voit pas à l'œil une primitive de f, on peut effectivement passer par le théorème de changement de variables, à condition de bien en connaître les hypothèses. Malgré la question 2 de l'exercice 2, aucun candidat n'a pensé à décomposer la matrice M de la question 3 en fonction de I, σ_x, σ_y et σ_z. De plus, pour montrer l'égalité des deux ensembles, il ne faut pas se contenter de montrer une inclusion, mais bien s'intéresser à la double inclusion ; certains candidats ne réalisaient même pas le caractère incomplet de leur démonstration.

Planche 13. L'exercice 1 a plu aux candidats, même si nous avons dû les guider un peu pour les questions 3(b) et 3(c). A l'exercice 2, nous avons demandé les hypothèses et l'énoncé général du théorème mettant en jeu les sommes de Riemann (sur un intervalle $[a, b]$) ; deux candidats sur les trois ont eu du mal à donner la discrétisation $(b - a)k/n + a$ attendue. Une candidate ayant traité la planche en 25 minutes a eu droit à l'exercice supplémentaire suivant, qu'elle a presque résolu entièrement :

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Planche 14. Interrogés sur le sens de la question 2(a) de l'exercice 1 à l'intérieur du raisonnement global pour calculer le maximum de h sur $\mathcal{X}_3$, aucun candidat n'a su expliquer qu'on effectuait une reparamétrisation surjective pour se ramener à un problème plus simple (deux variables non liées sur un domaine rectangulaire) que le problème originel (trois variables liées). En particulier, personne n'a justifié pourquoi a et θ devaient respectivement vivre dans $]0, 1]$ et $[0, 1/4]$, et tout le monde s'est concentré sur le côté mécanique du calcul permettant d'avoir l'expression générale de $f(a, \theta)$. A l'exercice 2, tous ont vu plus ou moins rapidement que si λ est valeur propre de B, alors λ^2 est valeur propre de A ; personne n'a en revanche réalisé que cela indiquait que le spectre de B était inclus dans (les étudiants disaient de plus "égal à") un certain ensemble, défini non pas par les racines carrées des valeurs propres de A, mais par

$$\left\{-\sqrt{\mu},\ +\sqrt{\mu},\quad \mu \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } \mu \geq 0\right\}.$$

Il ne fallait pas oublier de ne considérer que les valeurs propres positives ou nulles de A et de mettre un signe éventuel devant leurs racines carrées.

Planche 15. L'exercice 1 était volontairement un peu hors-programme (le programme ne considère que des variables discrètes ou continues). Les candidats s'en sont bien tirés, même s'ils ont pris un peu de temps pour tracer la fonction de répartition et sont restés cois pendant la préparation (mais pas pendant le passage) sur le calcul de la variance ; et nous avons ainsi pu vérifier la solidité de leurs bases en probabilités. A l'exercice 2, question 1, il s'agissait bien de refaire un raisonnement (par double implication) ; nous avons fort peu apprécié l'argument consistant à reconnaître que $a_1b_2 - b_1a_2$ est le déterminant d'une certaine matrice, et que le supposer non nul équivaut à ce que cette matrice est inversible. Faut-il encore le rappeler, la notion de déterminant n'est explicitement pas au programme.

Planche 16. L'exercice 1, très facile et sur lequel il n'y a rien à signaler de particulier, était destiné à contrebalancer un exercice 2 plus délicat. Les difficultés y commençaient souvent dès la première question, à tel point que certains ne savaient plus quand une fonction d'une variable réelle avait une dérivée identiquement nulle. A la question 3, une fois arrivés à une égalité du type $e^{ax}g_1(y) = e^{by}g_2(x)$, personne ne pensait à regrouper les x et y de part et d'autre du signe d'égalité, malgré nos indications demandant comment résoudre, par exemple, une équation linéaire plus simple telle $2x + 3y = y - x$. La question 4 a permis de vérifier que le lemme de Schwarz est désormais familier.

Planche 17. La première question de l'exercice 1 a mis en lumière le manque d'habileté calculatoire des candidats ; le recours à l'identité remarquable $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ combiné à ce que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est nulle permet de calculer très rapidement I_P et d'économiser un temps précieux pour l'exercice 2, assez long. La deuxième question se résout elle aussi très rapidement en effectuant une mise sous forme canonique ; ceux qui ont calculé les points critiques avaient souvent oublié que ces derniers n'étaient pas nécessairement des extrema locaux, encore moins globaux. A l'exercice 2, le jury a été surpris par la peine qu'ont eue les candidats à voir que (s_n) était croissante. Le seul candidat ayant tenté la question 3 avait du mal à réaliser que f, définie en un nombre fini de points, était plus une suite finie de réels qu'une fonction (il voulait employer des propriétés de continuité).

Planche 18. De manière fort surprenante, les trois candidats ont commis la même erreur de logique à la question 1 de l'exercice 1 : partir de la forme souhaitée et vérifier qu'effectivement $P(1) = P(-1) = 0$; pas un seul n'a pris un polynôme quelconque, de la forme $aX^2 + bX + c$. A la question 2, deux candidats sur trois n'ont pas réussi à énoncer parfaitement le théorème de la bijection monotone ; on rappelle en particulier que la monotonie doit être stricte. La question 1 de l'exercice 2 a donné lieu, comme la première question de l'exercice de probabilités du sujet d'écrit, à un florilège de réponses incorrectes et de justifications approximatives. On a souvent vu les valeurs n et $n!$. Un seul candidat a su se corriger rapidement une fois qu'on lui a demandé d'écrire quelques valeurs possibles pour A (autres que les valeurs trop particulières réduites à un singleton, par lesquelles il avait commencé). De manière surprenante, les questions suivantes ont posé nettement moins de soucis.

Planche 19. A l'exercice 1, les mêmes remarques que d'habitude s'imposent sur la somme géométrique rencontrée à la première question. Si les candidats ont souvent bien vu pourquoi $u_2 = f(u_1)$, ils ont été, assez étrangement, incapables de reproduire ce raisonnement à un rang n quelconque, malgré nos indications. A la question 2(d), on trouve deux points fixes possibles et on avait l'impression que les étudiants choisissaient celui qui n'était pas 1 parce qu'il avait une meilleure tête ; leurs justifications sibyllines ont été (textuellement) "on prend le premier qui borne la suite" ou "on converge vers la première valeur rencontrée". L'exercice 2 n'a pas eu plus de succès : si à la question 1, tous ont pensé plus ou moins rapidement au théorème des accroissements finis, le lien entre le théorème ainsi qu'ils l'énoncent (avec l'existence de c tel que...) et la propriété à prouver (il suffit de poser $\theta = c/x$, lorsque $x \neq 0$) n'a été clair que pour un seul candidat. Le reste de l'exercice a été traité de manière chaotique, peut-être à cause de la difficulté conceptuelle que représente la définition implicite de la fonction θ.