Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.

On considère une suite $U_1, U_2, \ldots$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $[0,1]$. On fixe dans ce qui suit un réel $\lambda > 0$.

(1) Déterminer (pour tout entier j) la loi de
$$Y_j = -\frac{1}{\lambda} \ln U_j \ .$$
(2) On note $M_n = \max\left\{Y_1, \ldots, Y_n\right\}$. Donner la fonction de répartition de M_n.

(3) On définit $Z_n = \lambda\, M_n - \ln n$ et on note F_n la fonction de répartition de Z_n. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(F_n(t))$ converge vers une limite notée $G(t)$.

(4) La fonction G ainsi définie est-elle encore une fonction de répartition ?
(On pourra montrer que G est inversible et s'intéresser à $G^{-1}(U)$, où U suit une loi uniforme sur $[0,1]$.)

Exercice 2.

On fixe un entier $n \geq 1$. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (deux matrices réelles de taille $n \times n$), ayant chacune une seule valeur propre. On note λ la valeur propre de A et μ celle de B. Pour une autre matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, on veut donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice
$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$
soit diagonalisable.

On note I_n et I_{2n} les matrices identités de, respectivement, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que les valeurs propres de M, quand elles existent, sont λ et/ou μ.

(2) En déduire que lorsque M est diagonalisable, $(M - \lambda I_{2n})(M - \mu I_{2n})$ est la matrice nulle.

(3) En tirer (toujours sous l'hypothèse que M est diagonalisable et lorsque $\lambda \neq \mu$) que $A = \lambda I_n$ et $B = \mu I_n$.

(4) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si ou bien M est de la forme λI_{2n} ou bien $\lambda \neq \mu$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

(1) Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.
(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} .$$

(3) En déduire que $u_n^2 \sim n^2$.
On pourra étudier au préalable la suite $(u_{n+1}^2 - u_n^2)$.

Exercice 2.
On fixe un entier $n \geq 1$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels de taille $n \times n$. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = M^2$. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité.

(1) Trouver un polynôme P tel que $X^2 - (X-1)\,P = 1$. S'en inspirer pour exhiber une matrice A telle que $M^2 - (M - I_n)\,A = I_n$.
(2) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(M - I_n) \oplus \operatorname{Ker} M^2$.
(3) Lorsque $n = 3$ et que 1 est valeur propre de M, montrer que M est semblable à l'une des 4 matrices suivantes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Attention ! L'énoncé tient en deux pages.

Exercice 1.
Soit $n \geq 1$ un entier. On note E_n l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n s'annulant en 0, c'est-à-dire,

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(0) = 0\} .$$

(1) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, dont on précisera la dimension et une base simple.
(2) Soit $u : P(X) \in E_n \mapsto X(P(X) - P(X-1))$. Montrer que u est un endomorphisme et préciser sa représentation matricielle dans la base exhibée au point précédent.
(3) Dans cette question, n n'est plus fixé. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme quelconque (aucune contrainte sur le degré). A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R = X(P(X) - P(X-1))$?

Exercice 2.
On considère N variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

(1) On note, pour tout $2 \leq n \leq N$, p_n la probabilité de voir pour la première fois la suite 0, 1 (dans cet ordre) aux rangs $n-1$ et n dans la suite $X_1, X_2, \ldots, X_N$. (On dira alors que la position de la suite est n.)
  (a) Calculer p_2, p_3 et p_4.
  (b) Déterminer la formule générale de p_n et montrer en particulier que cette probabilité ne dépend pas de N.
(2) Soit s un réel de $[0, 1]$. Calculer

$$G_N(s) = \sum_{n=2}^{N} p_n s^n ,$$

et écrire $G_N(s)$ sous la forme $h(s) + R_N(s)$ avec $R_N(s)$ tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
(3) Si la suite 0, 1 n'est pas vue entre 2 et N on dira que sa position est 0. On note la probabilité de cet événement $p_0(N)$.
Interpréter $G_N(1)$ en fonction de $p_0(N)$. Donner la limite de $p_0(N)$ lorsque $N \to +\infty$.

(4) Montrer que la position moyenne du premier instant entre 2 et N où l'on voit la suite 0, 1 est donnée par la dérivée de G_N en 1.

(5) Expliquer pourquoi $R'_N(1)$, la dérivée de R_N en 1 tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. En déduire la limite de la position moyenne du premier instant où l'on voit 0, 1, lorsque $N \to +\infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit a un réel non nul et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Quel est le rang de A ?
(2) Déterminer valeurs et vecteurs propres de A ; A est-elle diagonalisable ?

On fixe maintenant un entier $n \geq 1$ et $2n$ réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ (certains d'entre eux peuvent être nuls). On note M la matrice $M = [a_i b_j]_{1 \leq i,j \leq n}$.

(3) Montrer que $M = A$ pour des paramètres n, a_i et b_j à préciser.
(4) Donner les valeurs propres de M (et leur multiplicité) en fonction des a_i et des b_j, et indiquer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M.

Exercice 2.

(1) On dispose d'une baguette de bois de longueur b qu'on peut couper comme l'on veut. On veut construire avec elle les arêtes d'un rectangle de surface intérieure maximale. Comment fait-on ?

Il s'agit maintenant de réaliser un lampion en forme de pavé (*id est*, une figure à huit sommets et dont toutes les faces sont des rectangles) avec des baguettes de bois, pour les arêtes, et du papier, pour les faces. On ne dispose que d'une très grande baguette de bois de longueur a que l'on peut couper ici encore comme l'on veut.

(2) On veut maximiser le volume intérieur du pavé. Justifier que la somme des longueurs des arêtes du pavé doit être égale à a.
(3) Trouver le volume maximal possible ainsi que la longueur des baguettes nécessaire pour l'atteindre.
(On pourra soit déduire le résultat de la question (1), soit utiliser directement le théorème des extrema liés.)
(4) Quelle surface totale de papier est-il alors nécessaire d'avoir pour recouvrir le lampion ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Attention ! L'énoncé tient en deux pages.

Exercice 1.
On définit la fonction tangente hyperbolique th pour tout réel x par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ .$$

(1) Donner un développement limité à l'ordre 3 de $\mathrm{th}(x)$ quand x tend vers 0.
(2) Etudier, en fonction du réel x, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{2^n}\ \mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) \ .$$

(3) Donner la somme $\Sigma(x)$ de la série quand elle existe.
On pourra montrer que pour $x \neq 0$,

$$\frac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)} = \mathrm{th}(x) \ .$$

(4) Etudier la continuité de $\Sigma(x)$.

Exercice 2.
On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels ; la matrice identité sera désignée par I_n. On note $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application trace, définie de la sorte. Pour $M = [m_{i,j}]$, on pose

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} \ .$$

(1) Montrer que Tr est une application linéaire, vérifiant $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour tout couple de matrices A et B.
(2) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
(3) Soit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un tel endomorphisme, pour lequel on suppose qu'il existe un réel λ_u tel que

$$\mathrm{Tr}\big(u(M)\big) = \lambda_u\ \mathrm{Tr}(M)$$

pour toute matrice M. (On dit que u dilate la trace d'un facteur λ_u.)
(a) Montrer que

$$\nu : M \mapsto \frac{1}{n}\ \mathrm{Tr}(M)\, I_n$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve la trace, *id est*, la dilate d'un facteur $\lambda_v = 1$.

(b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker Tr} \oplus \text{Vect } I_n$, où $\text{Vect } I_n = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'espace vectoriel engendré par I_n.

(c) En déduire que l'ensemble des endomorphismes u dilatant la trace et tels que $u(I_n) = \lambda_u I_n$ forme un sous-espace vectoriel, dont on précisera la dimension.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application trace, définie de la sorte. Pour $M = [m_{i,j}]$, on pose

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} .$$

Soient A et B deux matrices fixées non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \mathrm{Tr}(AX) \end{aligned}$$

est une application linéaire et donner la dimension de son noyau.

(2) On étudie maintenant l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & X + \mathrm{Tr}(AX)\,B \end{array}$$

Montrer que φ est une application linéaire qui n'est pas l'identité.

(3) Montrer que 1 est valeur propre de φ. Donner la dimension de l'espace propre associé.

(4) Conclure que φ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(AB) \neq 0$.

Exercice 2.
On veut poser

$$I : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\, dt .$$

(1) Montrer que I est bien définie.

(2) Déterminer a tel que $f : t \mapsto |\sin t| - a$ admette une primitive F telle que $F(k\pi) = 0$ pour tous $k = 0, 1, 2, \ldots$. Justifier que F est π–périodique.

(3) En déduire l'équivalent, quand $x \to \infty$,

$$\int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t}\, dt \sim a \ln x .$$

(4) Montrer qu'il existe un réel b tel que, lorsque $x \to \infty$,

$$I(x) - a \ln x - b = O(1/x) .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Attention ! L'énoncé tient en deux pages.

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans E. On note f^2 l'application composée $f \circ f$.

(1) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
(2) On définit une application linéaire g par

$$g : \begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} f^2 & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Montrer que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
(3) Prouver que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ et que les rangs de f et g vérifient $\operatorname{rg} g \leq \operatorname{rg} f$.
(4) Démontrer que $\dim(\operatorname{Ker} f^2) \leq 2 \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Exercice 2.
On dispose d'une urne contenant un grand nombre de boules et on va y effectuer des tirages avec remise. Les boules sont de trois couleurs possibles : rouge, jaune et vert. Les proportions respectives de boules de couleur rouge, jaune et verte sont p_1, p_2, p_3, où tous les p_j sont tels que $0 \leq p_j < 1$. Soit N le nombre de tirage (avec remise, donc) nécessaires pour avoir obtenu au moins deux boules de couleurs différentes.

(1) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de $\mathbb{P}\{N = n\}$.
(2) Montrer que pour $0 \leq p < 1$, la série

$$\sum_{k \geq 2} k\, p^{k-1}$$

est convergente et déterminer sa valeur, par exemple en déterminant explicitement

$$\sum_{k=1,\ldots,N} k\, p^{k-1} .$$

(3) En déduire que

$$\mathbb{E}\, N = \frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_2} + \frac{1}{1-p_3} - 2 .$$

(4) Montrer que $\mathbb{E}\, N$ admet un minimum local au point $(p_1, p_2, p_3) = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$,
 (a) en prouvant au préalable que $\mathbb{E}\, N$ est susceptible d'admettre un minimum local en $(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ uniquement ; on pourra à cet effet appliquer le théorème

des extrema liés ou écrire $\mathbb{E}\,N = F(p_1, p_2)$ pour un domaine D et une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ à préciser ;

(b) puis en vérifiant que $\mathbb{E}\,N$ admet effectivement un minimum local en $(1/3, 1/3, 1/3)$.

(5) Seulement si le temps le permet, prouver qu'en $(1/3, 1/3, 1/3)$, $\mathbb{E}\,N$ admet même son minimum global sur l'ensemble des triplets de proportions (p_1, p_2, p_3) tels que $p_j \neq 1$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Attention ! L'énoncé tient en deux pages.

Exercice 1.
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre p fixé, avec $0 < p < 1$. Pour tout entier $j \geq 1$, on note $Y_j = X_j X_{j+1}$; pour tout entier $n \geq 1$, on définit alors $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

(1) Déterminer la loi des Y_j.

(2) Les variables Y_j sont-elles deux à deux indépendantes ?

(3) Montrer que

$$\operatorname{Var} S_n = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var} Y_j + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) \ .$$

(4) Calculer alors $\mathbb{E}\, S_n$ et $\operatorname{Var} S_n$.

(5) Montrer que la suite (S_n/n) converge en probabilité vers une limite à préciser.

Exercice 2.
Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton i (entre 1 et 101), il peut trouver une manière de scinder le reste du troupeau (les 100 moutons restants) en deux groupes A_i et B_i de 50 moutons chacun et tels que la somme des poids des moutons du groupe A_i d'une part, et celle de ceux de B_i d'autre part, soient égales. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Cet exercice se propose de retrouver son raisonnement.

(1) Montrer que si A et B sont deux matrices réelles équivalentes de taille $n \times n$, alors pour tout réel a et toute ligne C de taille n, il existe une ligne D de taille n telle que

$$\begin{bmatrix} a & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a & D \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

sont équivalentes.

(2) On dit qu'une matrice carrée est de type impair si ses coefficients sont des entiers relatifs, tels que ceux de la diagonale sont impairs tandis que les autres sont pairs. Montrer par récurrence la propriété suivante. Toute matrice carrée de type impair est équivalente à une matrice dont la diagonale est formée d'entiers impairs et dont les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.
En déduire que les matrices de type impair sont inversibles.

(3) Revenons-en à nos moutons. On construit la matrice B de taille 101×101 selon

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si le mouton } j \text{ est dans le groupe } A_i, \\ 2 & \text{si le mouton } j \text{ est dans le groupe } B_i. \end{cases}$$

On note par ailleurs

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{101} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

qui sont respectivement le vecteur des poids des moutons et le vecteur composé de 101 éléments 1.

Calculer $B\,X$, puis $B\,\underline{1}$, et expliquer alors pourquoi tous les x_j sont égaux.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit x un réel fixé. On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n(x) = x^2 (1 - x^2)^{n-1} .$$

(1) Etudier la convergence de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x.
(2) Calculer, quand la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) .$$

(3) Quelle est la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 en étant différent de 0 ?
(4) Soit $\sqrt{2} > \varepsilon > 0$. Montrer que le maximum U_n de $|u_n|$ sur $[-\sqrt{2} + \varepsilon, \sqrt{2} - \varepsilon]$ existe, et que la série $\Sigma_{n \geq 1} U_n$ diverge.

Exercice 2.
On considère deux urnes, celle de gauche contient au début du jeu (tour $t = 0$) deux boules blanches et celle de droite, deux boules noires. On répète le protocole suivant : à chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, on part de la configuration du tour $t - 1$, on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on les échange. On note X_t le nombre de boules blanches dans l'urne de gauche.

(1) Déterminer X_0 et X_1. Quelles sont les valeurs possibles pour X_t lorsque $t \geq 2$?
(2) Déterminer, pour $i = 0, 1, 2$ et $k \geq 0$ tels que $\mathbb{P}\{X_k = i\} > 0$, la valeur de $\mathbb{P}\{X_{k+1} = j \,|\, X_k = i\}$, pour $j = 0, 1, 2$.
(3) Pour $k \geq 0$, on note z_k le vecteur

$$z_k = \begin{bmatrix} \mathbb{P}\{X_k = 0\} \\ \mathbb{P}\{X_k = 1\} \\ \mathbb{P}\{X_k = 2\} \end{bmatrix} .$$

Exhiber une matrice M telle que $z_{k+1} = M z_k$ pour tout $k \geq 0$.
(4) Calculer les valeurs propres de M.
(5) En déduire que toutes les composantes de z_k convergent lorsque $k \to \infty$; déterminer le vecteur limite ainsi obtenu en prouvant au préalable que ses composantes sont de somme 1.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit p un entier positif. On rappelle que par convention, $0^0 = 1$.

(1) Pour tout $0 \leq x \leq 1$, montrer que $\dfrac{1}{2+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$.

(2) Montrer la convergence de la série de terme général (u_n) donné par

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)} .$$

(3) Pour tout entier N, on pose alors $s_N = u_0 + ... + u_N$ et S la somme de la série. Montrer que pour tout $N \geq 0$, il existe R_N tel que

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,dx = \frac{s_N}{2} + R_N$$

avec $|R_N| \leq 2^{-(N+2)}$.

(4) Calculer S dans le cas $p = 2$.

Exercice 2.
On suppose que la taille d'un arbre varie d'année en année en fonction du taux d'ensoleillement : si $X_1, X_2, \ldots$ sont les dits taux d'ensoleillement, supposés strictement positifs, indépendants et identiquement distribués, et si Z_0 est la taille initiale ($Z_0 > 0$), alors la taille à la fin de l'année $k+1$ est donnée en fonction de la taille de l'année k et du taux d'ensoleillement durant l'année $k+1$ par la formule suivante,

$$Z_{k+1} = Z_k + X_{k+1} Z_k ,$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots$.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \ln \frac{Z_n}{Z_0} .$$

(2) On suppose que les X_k ont une moyenne $m > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right)^{1/n} \geq e^m + \varepsilon \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

(3) On suppose que les X_k sont de variance 1. Enoncer le théorème de la limite centrale pour $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(4) En déduire un minorant approché $\widehat{m}$ du taux d'ensoleillement moyen m, qui ne dépende que de Z_n et Z_0 et tel que pour n assez grand, $\mathbb{P}(\widehat{m} \leq m)$ soit supérieur à environ 95 %.
On rappelle que si U suit une loi normale centrée réduite, alors $\mathbb{P}(U > 1.65) \leq 5\%$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ et ψ deux fonctions croissantes de I dans $\mathbb{R}$.

(1) On définit h sur $I \times I$ par
$$h(x, y) = (\varphi(x) - \varphi(y)) (\psi(x) - \psi(y)) \ .$$
Que peut-on dire du signe de h ?

(2) En déduire que si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans I telle que $\varphi(X)$, $\psi(X)$ et $\varphi(X)\psi(X)$ admettent une espérance, alors
$$\mathbb{E}[\varphi(X)]\, \mathbb{E}[\psi(X)] \leq \mathbb{E}[\varphi(X)\psi(X)] \ .$$

(3) Dans cette question et la suivante, $I =]0, +\infty[$. Montrer que lorsque X et $1/X$ admettent une espérance, alors
$$\frac{1}{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \ .$$

(4) Montrer que l'inégalité de la question (3) est une égalité si et seulement si X est constante.

Exercice 2.

Soient n un entier non nul et a, b, u trois nombres complexes avec $a \neq b$ et $u \neq 0$. Le but de cet exercice est de chercher les nombres complexes z tels que
$$(z - a)^n = u\,(z - b)^n \ .$$

(1) Montrer que l'équation est équivalente à chercher ν tel que $\nu^n = u$ et z tel que
$$\frac{z-a}{z-b} = \nu \ .$$

(2) En déduire toutes les solutions lorsque $a = j$, $b = j^2$, $u = 1$ et $n = 6$. (On rappelle que j est le nombre complexe de partie imaginaire strictement positive tel que $j^3 = 1$.)

(3) Vérifier le résultat de la question précédente en développant les deux polynômes initiaux.

(4) On étudie maintenant le cas de a, b, u trois nombres complexes tels que $|u| = 1$ et a et b sont conjugués : montrer alors que toutes les racines de l'équation considérée sont réelles. (On pourra remarquer que l'ensemble des racines est inclus dans une droite à préciser.)

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire de loi logistique, c'est-à-dire de densité sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} .$$

(1) Vérifier que f est bien une densité.
(2) Montrer que

$$Y = \frac{1}{1+e^{-X}}$$

suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2.
On se place dans l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients complexes, noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On en considère les éléments

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Dans tout ce qui suit, $\overline{a}$ désigne le conjugué du nombre complexe a, et $|a|$ son module.

(1) Donner les valeurs propres de σ_x, σ_y, σ_z. (Cette question ne sert plus dans la suite.)
(2) Montrer que $(I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
(3) On note $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ l'application trace : pour $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose

$$\mathrm{Tr}(M) = m_{1,1} + m_{2,2} .$$

Montrer que l'ensemble des matrices de trace égale à 1 est

$$\mathcal{E} = \left\{ M = \frac{1}{2}(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z),\ x,\ y,\ z \in \mathbb{C} \right\} ,$$

et que l'écriture de tout élément M en fonction de (x, y, z) est unique.
(4) Soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ M_{ab} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{C} \text{ tels que } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} .$$

Montrer l'inclusion

$$\mathcal{A} \subset \left\{ M = \frac{1}{2}(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \text{ tels que } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x,\ y,\ z \text{ réels} \right\} .$$

(5) Montrer que les deux ensembles sont en fait égaux.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable, de dérivée f' continue, vérifiant en outre que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq f'(x) \leq 1 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Pour $x \geq 0$, on pose

$$g(x) = \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t)\, dt\ .$$

(1) Montrer que g est dérivable et écrire sa dérivée sous la forme $g'(x) = f(x)\, h(x)$ pour une fonction h à préciser.
(2) Montrer que g est croissante.
(3) On veut déterminer les applications f telles que g est la fonction nulle : $g(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$.
   (a) Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$ et $f(x) = x$ pour tout $x \geq 0$ conviennent toutes deux.
   (b) On fixe dans cette question et la suivante une fonction f telle que $g = 0$. Montrer qu'en un point $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) > 0$, il existe un intervalle $I = [x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon]$ tel que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in I$.
   (c) Tracer l'allure de f et conclure que seules les applications considérées à la question (a) conviennent.

Exercice 2.
Pour un entier $N \geq 1$, on considère $N+1$ urnes opaques qui contiennent chacune N boules ; l'urne numéro $k = 0, 1, \ldots, N$ contient k boules rouges et $N - k$ boules noires. Le joueur choisit une de ces urnes au hasard et y tire successivement n boules, chaque boule étant remise avant le tirage suivant. Le joueur ne sait pas la composition de l'urne dans laquelle il tire. On désigne par A_n l'événement “les n boules tirées par le joueur sont rouges”.

(1) Quelle est la probabilité de A_n ?
(2) Sachant que le joueur a tiré n boules rouges et qu'il ne change pas d'urne pour effectuer le $(n+1)$–ième tirage, quelle est la probabilité qu'il tire encore une boule rouge ?
(3) Déterminer la limite quand $N \to +\infty$ des probabilités calculées aux deux questions précédentes.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.

(1) Que peut-on dire de la fonction g définie par

$$g : (x,y) \in]0,1[^2 \mapsto \; g(x,y) = \frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}$$

sur l'ensemble $\mathcal{X}_2 = \{(x,y) : x > 0,\; y > 0 \text{ et } x+y=1\}$?

(2) On veut calculer le maximum de la fonction

$$h : (x,y,z) \in [0,1[^3 \mapsto \; h(x,y,z) = \frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\frac{z}{1-z}$$

sur l'ensemble

$$\mathcal{X}_3 = \{(x,y,z) :\; 0 \le x < 1,\; 0 \le y < 1,\; 0 \le z < 1 \text{ et } x+y+z=1\} .$$

(a) Montrer que ce maximum est exactement le maximum de la fonction

$$f : (a,\theta) \in \,]0,1] \times [0,1/4] \;\mapsto\; f(a,\theta) = \frac{\theta\, a(1-a)}{1-a+\theta a^2} .$$

On pourra poser $x+y=a$ et $x=ta$.

(b) Montrer que le maximum M_a de $\theta \in [0,1/4] \mapsto f(a,\theta)$ vaut $a(1-a)/(a-2)^2$.

(c) Déterminer alors le maximum de h sur $\mathcal{X}_3$.

Exercice 2.

Soit $n \ge 1$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle de taille $n \times n$. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité de même taille, et on pose

$$B = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) .$$

(1) Calculer le rang de B en fonction de celui de A ; en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit valeur propre de B.

(2) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de B en fonction de celles et ceux de A.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de B.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.

On considère le jeu suivant : un joueur lance un dé à six faces non biaisé. Si le résultat est pair, le score X du joueur est ce qu'indique la face du dé. Si le résultat est impair, le joueur doit appuyer sur un bouton et un ordinateur tire au hasard et de manière uniforme un nombre entre 0 et 1, qui forme le score X du joueur.

(1) Donner l'espace d'états de la variable aléatoire X.
(2) Préciser la fonction de répartition de X et la tracer.
(3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2.

(1) Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des réels fixés. Montrer que le système d'inconnues x, y

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y &= 0 \\ b_1 x + b_2 y &= 0 \end{cases}$$

admet une solution une unique solution $x = 0$ et $y = 0$ si et seulement si

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0 \ .$$

On fixe désormais quatre réels a, b, c, d et on note A et I_2 les matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

(2) Montrer qu'il existe des nombres α et β, que l'on calculera, tels que

$$A^2 - \alpha A - \beta I_2 = 0 \ .$$

(3) Dans quel cas α et β sont-ils uniques ?
On se place dans ce cas pour le restant de l'exercice.
(4) Soit

$$\mathcal{M} = \{M_{x,y} = x I + y A, \ x, y \in \mathbb{R}\} \ .$$

Montrer que si $M_{x,y} \in \mathcal{M}$ est inversible, alors son inverse appartient à $\mathcal{M}$.
(5) A quelle condition sur A tous les éléments de $\mathcal{M}$ non nuls sont-ils inversibles ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Attention ! L'énoncé tient en deux pages.

Exercice 1.

Soit f la fonction définie, pour x réel, par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(1) Vérifier que f est une densité.

(2) Calculer la moyenne et la variance d'une variable aléatoire X de densité f.

(3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{6\varepsilon^2} .$$

Exercice 2.

Soit H le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des fonctions de deux variables (x, y) dérivables deux fois et à dérivées secondes continues sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Rappeler la forme générale de toutes les fonctions g de H telles que, pour tout (x, y),

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 .$$

(2) Soit a et b deux réels fixés. On regarde maintenant les applications φ_1 et φ_2 qui à tout f de H associent respectivement

$$\varphi_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x} - af \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - bf .$$

Vérifier que ces applications sont linéaires et donner leur noyau. Sont-elles des endormorphismes ?

(On pourra par exemple justifier que l'on peut écrire toute fonction $f(x, y)$ sous la forme $e^{ax} g(x, y)$.)

(3) Déterminer $\text{Ker } \varphi_1 \cap \text{Ker } \varphi_2$.

(4) On se donne maintenant des fonctions A et B de H et on cherche les f telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - af = A \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - bf = B .$$

Montrer que s'il existe une solution f dans H, alors $\varphi_2(A) = \varphi_1(B)$.

(5) On se restreint au cas où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Supposons en outre que A est une fonction de x seulement et B une fonction de y seulement. Montrer que pour qu'une solution f de H existe pour le système précédent, il faut que A et B soient des fonctions constantes bien choisies. Trouver alors l'ensemble des solutions.
(On pourra écrire $f(x, y) = e^{ax+by} g(x, y)$.)

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Attention ! L'énoncé tient en deux pages.

Exercice 1.
On veut déterminer les polynômes P de la forme $X^3 + \alpha X^2 + \gamma$, où α et γ sont des réels, tels que la quantité

$$I_P = \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt$$

soit minimale.

(1) Calculer I_P en fonction de α et γ.
(2) Déterminer le minimum de

$$\gamma^2 + \frac{2}{3}\alpha\gamma + \frac{1}{5}\alpha^2$$

lorsque (α, γ) parcourt $\mathbb{R}^2$.
(3) Répondre finalement à la question initiale : quels sont les polynômes P de la forme considérée tels que I_P soit minimale ?

Exercice 2.
Paul et Quentin passent leurs vacances à jouer à la pétanque. A chaque partie, Paul a une probabilité p de gagner (avec $p \neq 0$, $p \neq 1/2$, $p \neq 1$), et Quentin, une probabilité $1 - p$. A la fin de la partie n, le joueur qui a perdu verse 1 euro à son adversaire. Sa fortune au début de la partie $n+1$ est donc celle qu'il avait au début de la partie n moins un euro. Chaque partie jouée est totalement indépendante des autres. Paul possède a pièces de un euro au départ, et Quentin, b telles pièces (où a et b sont des entiers positifs ou nuls). On note $T = a + b$ le nombre de pièces en circulation.

On dit que Paul est ruiné lorsqu'il ne possède plus de pièces. Par exemple, Paul est ruiné au premier coup exactement si $a = 0$; au deuxième coup si $a = 1$ et qu'il perd au premier coup. Une fois qu'un des joueurs est ruiné, il le reste indéfiniment (on arrête de jouer).

(1) On note s_n la probabilité que Paul soit ruiné avant le début de la $(n+1)$–ième partie. Montrer que (s_n) converge.
On note $S(a)$ sa limite : montrer que $S(a) \leq 1$. Dans ce qui suit $S(a)$ correspond à la probabilité que Paul soit ruiné un jour.
Donner $S(0)$ et $S(T)$.

(2) Montrer que pour tout entier $1 \leq a \leq T-1$,

$$S(a) = p\,S(a+1) + (1-p)\,S(a-1)\ .$$

(3) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions $f : \{0, \ldots, T\} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $1 \leq a \leq T-1$,

$$f(a) = p\,f(a+1) + (1-p)\,f(a-1)\ ,$$

est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie, de base (f_0, f_1), où f_0 est la fonction constante $f_0 \equiv 1$ et $f_1(t) = ((1-p)/p)^t$.

(4) En déduire la valeur de $S(a)$ puis montrer qu'un jour, ou Paul ou Quentin est ruiné.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
Soit P un polynôme tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $P(x) \geq 0$. On suppose en outre que P est de degré inférieur ou égal à 2. On souhaite montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $a \in [-1, 1]$ tels que

$$P = \alpha(X - a)^2 + \beta(1 - X^2) .$$

(1) Etablir la propriété dans le cas où $P(1) = P(-1) = 0$.
(2) Montrer que l'application

$$\varphi : t \in [-1, 1] \ \mapsto \ \varphi(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1/2, 1/2]$. On note φ^{-1} son inverse.
(3) Choisir judicieusement $a \in [-1, 1]$ et $\alpha \geq 0$ en fonction de $P(1)$ et $P(-1)$ pour que $P - \alpha(X - a)^2$ s'annule en -1 et 1.
(4) Conclure alors à la propriété recherchée.

Exercice 2.
On fixe un entier $n \geq 2$ et on note $E = \{1, \ldots, n\}$. On considère n variables $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli symétrique :

$$\mathbb{P}\{X_j = 0\} = \mathbb{P}\{X_j = 1\} = 1/2 .$$

On note A l'ensemble aléatoire des j tels que $X_j = 1$,

$$A = \left\{ j \in E \,:\, X_j = 1 \right\} .$$

A est donc un sous-ensemble aléatoire de E.

(1) Combien de valeurs différentes A peut-il prendre ?
(2) On note $|A|$ le cardinal (*id est*, le nombre d'éléments) de A. Par exemple, $|E| = n$ et $|\{2, 3, 5, 8\}| = 4$.
Déterminer, pour tout entier $k = 0, 1, \ldots, n$, la probabilité $\mathbb{P}\{|A| = k\}$.
(3) Soit B une variable aléatoire de même loi que A et indépendante de A (construite par exemple sur des variables de Bernoulli $X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$).
Donner la loi de $|A \cap B|$ et en déduire $\mathbb{E}\,|A \cap B|$.
(4) Calculer la probabilité que A soit inclus dans B : $\mathbb{P}\{A \subset B\}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ. Le jury reviendra sur toutes les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.

Exercice 1.
On observe des virus qui se reproduisent selon une loi géométrique avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $0 < p < 1$, puis meurt : pour tout entier $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\mathbb{P}\{X = k\} = p\,(1-p)^k\ .$$

(1) Calculer, pour tout $r \in [0,1]$, la valeur

$$f(r) = \mathbb{E}\Big[r^X\Big]\ .$$

(2) On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc X_1 virus, où X_1 suit la loi géométrique de paramètre p ; chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon cette même loi géométrique avant de mourir : cela conduit à avoir X_2 virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}\{X_n = 0\}$.
  (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
  (b) Montrer que (u_n) est convergente.
  (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
  (d) Déterminer alors la limite de (u_n) en fonction de p. Interpréter le résultat.

Exercice 2.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tout réel x, il existe un réel θ de $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + x\,f'(\theta x)\ .$$

(2) Supposons dorénavant f deux fois dérivable et telle que f'' soit continue en 0 avec $f''(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x de $]-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon[$, le réel θ défini par la question précédente est unique.
On le note donc dorénavant $\theta(x)$.

(3) Trouver la limite quand x tend vers 0 de $\theta(x)$.
On note $\theta(0)$ cette limite.

(4) Montrer que $x \mapsto \theta(x)$ est une fonction continue sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.