Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^n \, dx$$

et on étudie ici la suite (I_n).

(1) Justifier l'existence des intégrales définissant les I_n.
(2) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite à préciser.
(3) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, pour tout $n \geq 1$.
(4) Conclure que $I_n = o\big((\ln 2)^n\big)$ et donner un équivalent de I_n.

Exercice 2.
Un marcheur se déplace le long d'une rue rectiligne. Il avance pas par pas avec probabilité 1/2 d'avancer vers la droite ou vers la gauche.

(1) Déterminer la probabilité que le marcheur revienne exactement à son point de départ au bout de n pas, où $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Le marcheur a à présent quatre directions possibles équiprobables (Est, Ouest, Nord et Sud). Répondre à nouveau à la question précédente.

Remarque : on n'obtiendra pas nécessairement d'expression simplifiée des probabilités en question, c'est la méthode de résolution qui compte ici.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On considère la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2} .$$

(1) Etudier (u_n) lorsque $u_0 \in \mathbb{R}$.
(2) On suppose désormais que $u_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe un unique couple

$$(r_n,\, \theta_n) \in \mathbb{R}_+^* \times (]-\pi, 0[\cup]0, \pi[) \quad \text{tel que} \quad u_n = r_n\, e^{i\theta_n} \ ;$$

on précisera une relation de récurrence entre (r_{n+1}, θ_{n+1}) et (r_n, θ_n) pour tout $n \geq 0$.
En déduire une expression explicite de θ_n en fonction de θ_0 et n.
(3) En admettant que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$, montrer que $(r_n \sin \theta_n)$ est une suite géométrique, de raison à préciser.
En déduire une expression explicite de $r_n \sin \theta_n$ en fonction de n, θ_0 et r_0.
(4) On dit qu'une suite (v_n) d'élements de $\mathbb{C}$ converge vers v lorsque les suites des parties imaginaires et réelles $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$.
Conclure ici que (u_n) converge, vers une limite à préciser.

Exercice 2.
On fixe un entier $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne et des 0 partout ailleurs.

(1) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
(2) Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$P = \frac{1}{n-1}\left(A^2 - A\right) .$$

(3) Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.
(4) Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez <u>tous deux</u>, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, avec une dérivée bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leq M$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon g(x)$.

(1) Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, f_ε est strictement croissante.
(2) Prouver alors que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, f_ε est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée et réduite. On note φ sa densité et Φ sa fonction de répartition. Soit c un réel et g la fonction définie par

$$g(x) = c\,\varphi(x)\,\Phi(x)$$

pour tout x réel.

(1) Trouver une relation entre $\Phi(x)$ et $\Phi(-x)$.
(2) Déterminer c pour que g soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.
(3) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Pour $n \geq 2$ et des réels $a_1, \ldots, a_n$, on considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Discuter le rang de M en fonction des a_k.
(2) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M si et seulement si

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_n = 0 \;;$$

exhiber également une base du sous-espace propre associé et préciser sa dimension.
(3) En déduire que
   - la matrice M est diagonalisable si et seulement si P admet n racines distinctes ;
   - si $a_n \geq 0$, alors M admet au moins une valeur propre positive.

Exercice 2.
Soit une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [1,4], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Déterminer la constante k.
(2) Déterminer la loi de la variable $Y = (X-2)^2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Pour $n \geq 2$, on considère deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

toutes deux diagonalisables. On veut montrer que la matrice définie par blocs

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 A & \lambda_2 A \\ \lambda_3 A & \lambda_4 A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est également diagonalisable.

(1) Montrer que la dimension du noyau de B est au moins deux fois celle du noyau de A. On pourra par exemple remarquer que si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \operatorname{Ker} A$, alors le vecteur $(u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0) \in \operatorname{Ker} B$.

(2) Montrer que tout vecteur propre v de A permet de construire deux vecteurs propres linéairement indépendants de B, que l'on pourra chercher sous la forme $(\alpha v, \beta v)$, pour α, β deux réels.

(3) Prouver alors que B est diagonalisable.

Exercice 2.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} .$$

On pose $v_n = u_n^2$ pour tout n.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2 \leq v_{n+1} - v_n \leq 2 + \frac{1}{2n} .$$

(3) Prouver que lorsque $n \to \infty$,

$$u_n \sim \sqrt{2n} .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : lorsque Y et Z sont deux variables aléatoires réelles, on a

$$\mathbb{E}\left[|Y Z|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Z^2\right]} .$$

Soit X une variable aléatoire réelle ; on suppose qu'elle admet un moment d'ordre deux.

(1) Montrer que X admet également un moment d'ordre un ; sa variance est donc définie, on la note $\operatorname{Var} X$.

(2) Rappeler l'inégalité de Tchebychev, qui majore

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\Big)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

(3) Prouver l'inégalité de Tchebychev-Cantelli,

$$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\operatorname{Var} X}{\operatorname{Var} X + \varepsilon^2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.
On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à

$$(\varepsilon + \mathbb{E}[X] - X)\, \mathbb{I}_{\{X<\mathbb{E}[X]+\varepsilon\}} \qquad \text{où} \qquad \mathbb{I}_{\{X<\mathbb{E}[X]+\varepsilon\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } X < \mathbb{E}[X] + \varepsilon, \\ 0 & \text{si } X \geq \mathbb{E}[X] + \varepsilon. \end{cases}$$

(4) Déduire de la question précédente une majoration de

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) .$$

(5) On veut comparer les majorations découlant de (2) et (3) pour la quantité

$$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\Big)$$

et celles obtenues en (2) et (4) pour la quantité

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) .$$

Quelle est, dans chaque cas, la meilleure ?

Exercice 2.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = x^k \exp(x)$$

pour tout x réel. On note E_k l'espace vectoriel engendré par $f_0, f_1, \ldots, f_k$.

(1) Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$ est une base de E_k.

On se place désormais dans E_3 et on considère l'application définie, pour tout $f \in E_3$, par

$$\Phi(f) = f''' - 2f'' + f' .$$

(2) Montrer que Φ est un endomorphisme de E_3.

(3) Φ est-il diagonalisable?

(4) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker}\Phi$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On considère la suite (u_n) définie par récurrence comme suit. On part de $u_1 \in]0,1]$ et pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = f_n(u_n) \qquad \text{où} \qquad f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}\ .$$

(1) Montrer que (u_n) est une suite convergente, on note ℓ sa limite.
Prouver que $\ell = 0$, par exemple en effectuant un raisonnement par l'absurde.

(2) En étudiant les variations des fonctions f_n pour $n \geq 1$, montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \leq 1/n$.

(3) En déduire que $(nu_n)_{n\geq 2}$ est une suite croissante ; montrer qu'elle admet une limite $0 < \ell' \leq 1$.

(4) Prouver que pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$ et

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = nu_n\ ;$$

en tirer la valeur de ℓ'.

Exercice 2.
Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables ; l'une contient 5 allumettes, l'autre 2. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

(1) Déterminer la loi de X.

(2) Calculer l'espérance de X.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, *dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.*

Exercice 1.
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

(1) Calculer, pour $\lambda > 0$, la fonction de répartition de la variable aléatoire
$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$$
et en déduire sa loi.

On considère jusqu'à la fin de l'exercice une variable aléatoire Y de loi donnée par une densité f continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 ; on suppose que $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Montrer que sa fonction de répartition F effectue une bijection $\mathbb{R}_+ \to [0,1[$, d'inverse noté F^{-1}.
(3) On définit $F^{-1}(1) = 0$: déterminer la loi de $F^{-1}(U)$.
(4) Déterminer $F^{-1}(U)$ lorsque Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Comparer à ce que proposait la question (1) et commenter.

Exercice 2.
Soit E l'ensemble des applications f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 f''(x) - 4x f'(x) + 6 f(x) = 0 \ .$$

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
(2) Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $n \geq 2$ dans E : montrer que n vaut 2 ou 3.
(3) En déduire les polynômes éléments de E.
(4) Pour un élément $f \in E$ fixé, on définit la fonction g par
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x^2} \ .$$
Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$, puis que g'' est nulle.
(5) En déduire une base de E et la dimension de E.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On dispose d'une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotées $1, 2, \ldots, n$. On effectue des tirages successifs au hasard et avec remise, notés $X_1, X_2, \ldots$; et on s'intéresse à la loi du premier temps T où chacune des boules aura été tirée au moins une fois. On note par ailleurs S_k, pour tout entier $k \geq 1$, le nombre de boules différentes vues entre le premier et le k-ième tirage compris.

(1) Quelle est la probabilité que $X_1 = X_2$?
(2) Déterminer $\mathbb{P}(S_n = n)$ et en déduire $\mathbb{P}(T = \ell)$ pour tout entier $\ell \leq n$.
(3) Dans le cas $n = 2$, déterminer la loi de T.
(4) Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'espérance de T vaut

$$\mathbb{E}[T] = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots + \frac{n}{2} + n\ .$$

Exercice 2.
Soit une suite d'applications $(f_n)_{n \geq 0}$ définies sur $[0, \pi/4]$ par

$$f_0(x) = x$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \left(1 + f_n^2(t)\right)\, dt\ .$$

(1) Montrer pour tout $n \geq 0$, que f_n est une fonction polynômiale, de degré à préciser.
(2) x étant fixé dans $[0, \pi/4]$, montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par le réel $\tan(x)$. Qu'en déduire ?
(3) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $\quad 1 \leq f_n'(x) \leq 2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez <u>tous deux</u>, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On considère un espace vectoriel E et deux endomorphismes f et g non nuls tels que

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g\ .$$

(1) Donner un exemple de telle situation.
(2) Lorsque E est de dimension finie, montrer que les sommes ci-dessus sont en fait directes.
(3) Montrer que cela n'est pas nécessairement le cas lorsque E est de dimension infinie. On pourra par exemple considérer l'espace vectoriel des polynômes $E = \mathbb{R}[X]$ et f défini par $f(P) = P(0)$.

Exercice 2.
On veut considérer la fonction f telle que

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\exp(-t)}{t}\, dt$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$.

(1) Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
(2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée.
(3) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement en 0.
(4) Etudier la branche infinie de f et tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On fixe un entier $n \geq 2$; pour tout couple de réels a et b, on considère la matrice

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(1) Déterminer le rang de $M_{a,b}$ en fonction de a et b.
(2) Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 1$ et que b est donné par une variable aléatoire B uniforme sur $\{1, \dots, n\}$; quelle est la probabilité pour que $M_{a,B}$ soit inversible ?
(3) Montrer que pour tout couple (a, b) la matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable. Préciser valeurs propres et sous-espaces propres associés.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.
(2) Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ susceptibles d'être des extrema de f.
(3) Soit $t > 0$ fixé. Etudier les extrema de F_t, où F_t est la restriction de f à la droite d'équation $y = tx$.
(4) En déduire les extrema (absolus) de f.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. On dit que X est sans mémoire lorsque pour tous entiers n_1, $n_2 \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > n_2) = \mathbb{P}(X > n_1 + n_2 \mid X > n_1) \ .$$

(1) Montrer que si X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, alors X est sans mémoire.
Pourquoi s'attendait-on à cela ? (Penser à une interprétation de la loi géométrique.)

(2) Montrer que si X est sans mémoire, alors elle suit nécessairement une loi géométrique.

Soit Y une variable aléatoire, de loi admettant une densité f telle que $f = 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f > 0$ sur $[0, +\infty[$. On dit que Y est sans mémoire lorsque pour tous réels t_1, $t_2 > 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y > t_2) = \mathbb{P}(Y > t_1 + t_2 \mid Y > t_1) \ .$$

Pour t réel, on note $G(t) = \mathbb{P}(Y > t)$.

(3) Montrer que si Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors elle est sans mémoire.

On veut montrer que Y suit en fait nécessairement une loi exponentielle.

(4) Reformuler la propriété d'absence de mémoire à l'aide de G. Montrer que pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $G(nt) = (G(t))^n$.

(5) En déduire que pour tous entiers $p \geq 0$ et $q \geq 1$, on a

$$G(p/q) = (G(1))^{p/q} = \exp\left(\frac{p}{q} \ln G(1)\right) \ .$$

(6) Conclure qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t > 0$, on a

$$G(t) = \exp(-\lambda t)$$

et qu'ainsi, Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 2.
Soit E l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Supposons que des éléments f_1, f_2, ..., f_p de E vérifient

(i) $f_1 \neq 0_E, \ldots, f_p \neq 0_E$,

(ii) $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = I$ où I est l'application identité,

(iii) $f_i \circ f_j = 0$ pour $i \neq j$ avec $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$.

Pour $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ fixés, on pose

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p \ .$$

(1) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $f_i \circ f_i = f_i$.

(2) Calculer f^k, pour tout entier $k \geq 1$.

(3) Montrer que $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ forme une famille libre de E.

(4) Montrer que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont valeurs propres de f.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez <u>tous deux</u>, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On considère une suite (b_n) d'entiers strictement positifs et on lui associe la suite de polynômes (P_n) définis, pour $n \geq 2$, par

$$P_n(X) = X^n - \left(b_1 X^{n-1} + \ldots + b_{n-1} X + b_n\right) .$$

(1) Montrer que P_n admet une racine dans $]0, +\infty[$.
(2) Montrer que cette racine est unique, on la note λ_n. (On pourra par exemple procéder à un raisonnement par récurrence, en formulant soigneusement l'hypothèse d'induction.)
(3) Montrer que la suite (λ_n) est croissante.
(4) Montrer que (λ_n) converge lorsque $b_j = 1$ pour tout $j \geq 1$.

Exercice 2.
Soient f et g deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$. On note F et G les fonctions de répartition associées ; elles sont définies par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

pour tout $x \geq 0$.
On suppose que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et que $\varphi = f/g$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$.

(1) Discuter le signe de $\varphi - 1$ sur $]0, +\infty[$.
(2) Etudier les variations de $H = F - G$ sur $[0, +\infty[$.
(3) En déduire que pour tout x réel, on a $F(x) \leq G(x)$.
(4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la densité de probabilité $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

et on note F_n la fonction de répartition associée. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout x réel, on a $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Pour trois réels a, b, c, on considère le système linéaire suivant, d'inconnues x, y, z,

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay + bx & = & c \\ cx + az & = & b \\ bz + cy & = & a \end{array}\right.$$

Montrer que la solution est unique si et seulement si $abc \neq 0$, et exhiber dans ce cas le triplet solution.
Discuter le nombre et la forme des solutions lorsque $abc = 0$.

Exercice 2.

(1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a

$$x + 1 < e^x < x\,e^x + 1 \ .$$

(2) Posons $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right) \ .$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie ; et qu'elle est monotone.

(3) Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \ .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux*, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.*

Exercice 1.
On dispose $n \geq 2$ boules dans une urne, numérotées $1, 2, \dots, n$. Un premier joueur effectue des tirages sans remise (et au hasard chaque fois parmi les boules restants) jusqu'au premier tour X_1 où il tire la boule n.

(1) Montrer que X_1 suit une loi uniforme ; préciser son espérance.

Un second joueur entre alors en scène, et deux situations vont être considérées.

(2) Dans le premier cas, ce joueur effectue X_2 tirages jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les boules restantes (on pose $X_2 = 0$ lorsqu'il ne reste plus de boules dans l'urne).
  (a) Déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $X_1 = k$, pour tout $k = 1, \dots, n$ (i.e., déterminer, pour tout ℓ, $\mathbb{P}(X_2 = \ell \,|\, X_1 = k)$).
  (b) X_2 est-elle indépendante de X_1 ?
  (c) Calculer l'espérance de X_2.

(3) Dans le second cas, et toujours s'il reste au moins une boule dans l'urne, le second joueur tire simplement une boule au hasard, dont on note X_3 le numéro.
  (a) Comment définir X_3 lorsqu'il n'y a plus de boules dans l'urne, de sorte que X_3 soit indépendante de X_1 ? On pourra commencer par déterminer la loi conditionnelle de X_3 par rapport à tous les événements $X_1 = k$, $k \leq n-1$.
  (b) Quelles sont alors la loi et l'espérance de X_3 ?

Exercice 2.
On veut considérer la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

(1) Montrer que f est bien définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.
(2) Montrer que f admet un prolongement par continuité $f_- :]-\infty, -1] \to \mathbb{R}$ en -1 à gauche ; et un prolongement par continuité $f_+ : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ en -1 à droite.
(3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.
(4) Etudier la dérivabilité en -1 de f_+ et de f_-.
(5) Déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$; puis en dresser le tableau de variation.
(6) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

et on cherche à montrer qu'elle converge vers une limite à déterminer.

(1) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, on a pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k = 1, \ldots, n$,
$$\left|\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2} .$$
(2) Montrer que pour tout $u \in [-1/2, 1/2]$, on a les inégalités $0 \leq u - \ln(1 + u) \leq u^2$.
(3) Montrer que $(\ln u_n)_{n \geq n_0}$ est définie, et conclure.

Exercice 2.
Un pêcheur assidu est prêt à passer le temps qu'il faudra au bord d'un lac pour pêcher N poissons de son espèce favorite, la truite fario. Soit p la proportion de cette espèce dans le lac parmi la population totale (on pourra raisonner comme si cette population totale était infinie).

(1) Soit T le nombre de poissons pêchés pour obtenir une première truite fario : expliciter la loi de T.
(2) Soit T_N le nombre de poissons qu'il faudra pêcher pour réaliser son objectif : calculer $\mathbb{E}[T_N]$.
(3) Evaluer le nombre de poissons qu'il va devoir pêcher pour que la probabilité qu'il réalise son objectif soit voisine de 5%.

On donne
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1,64}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 0{,}05 .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
On dit qu'une suite (A_n) de matrices $A_n = \left[A_n^{(i,j)}\right]_{i,j}$ tend vers une matrice A lorsque, pour tout couple (i,j), on a $A_n^{(i,j)} \to A^{(i,j)}$.
Soit α un nombre réel. On veut montrer que la suite (A_n) des matrices définies, pour $n \geq 1$, par $A_n = (B_n)^n$ avec

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{bmatrix} ,$$

converge, vers une limite à préciser.

(1) Traiter le cas $\alpha = 0$. On suppose $\alpha \neq 0$ pour la suite des questions.
(2) Montrer que l'on peut écrire chaque B_n sous la forme

$$B_n = \rho_n \begin{bmatrix} \cos\varphi_n & \sin\varphi_n \\ -\sin\varphi_n & \cos\varphi_n \end{bmatrix} ,$$

où l'on caractérisera ρ_n et φ_n en fonction de α et n.
(3) En déduire que

$$A_n = (\rho_n)^n \begin{bmatrix} \cos(n\varphi_n) & \sin(n\varphi_n) \\ -\sin(n\varphi_n) & \cos(n\varphi_n) \end{bmatrix} .$$

(4) Montrer que $(\rho_n)^n \to 1$.
(5) Conclure à la convergence de (A_n), et préciser la limite.

Exercice 2.
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 ; $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On admettra que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = u'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big) + v'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big) .$$

On fixe deux réels a, b. Pour un paramètre $m \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions u et v_m définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) = a + t \quad \text{et} \quad v_m(t) = b + mt ,$$

et on note φ_m la fonction définie par

$$\varphi_m(t) = f\big(u(t), v_m(t)\big) = f(a+t,\, b+mt) .$$

(1) Calculer φ'_m et φ''_m en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

On supposera dorénavant que f vérifie les trois propriétés suivantes,

(H1) $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

(H2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$ $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) > 0$$

(H3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$ $$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \leq 0$$

(2) Commenter l'hypothèse (H1).

(3) Montrer en utilisant (H2) et (H3) que $\varphi''_m \geq 0$.

(4) En déduire les variations de φ_m.

(5) Montrer que f admet au point (a,b) un minimum absolu.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.
Soit (h_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On considère la suite (J_n) d'intégrales définies, pour $n \geq 1$, par

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + xh_n} \, dx \; ;$$

on introduit également la suite (I_n) d'intégrales

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx \qquad \text{où } \forall x \in [0,\, 1], \quad f_n(x) = \frac{1}{(1+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \; .$$

(1) Calculer, pour tout n, la valeur de J_n.
En déduire que lorsque $h_n \to \infty$, alors $J_n \to 0$.
(2) Montrer que pour une suite (h_n) bien choisie, on a $I_n \leq J_n$ et conclure que $I_n \to 0$.
(3) Calculer et encadrer la dérivée de la fonction $-\ln f_n$, et en déduire que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$e^{-u_n x} \leq f_n(x) \leq e^{-v_n x}$$

où (u_n) et (v_n) sont deux suites à préciser, telles que $u_n \sim \ln n$ et $v_n \sim \ln n$.
(4) En déduire un encadrement de I_n en fonction de u_n et v_n ; conclure à l'équivalent $I_n \sim 1/(\ln n)$.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} \, e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Vérifier que f_n est une densité de probabilité.

On notera dorénavant X une variable aléatoire réelle de loi de densité f_n.

(2) Calculer $\mathbb{E}[X]$.
(3) Calculer

$$\Psi(\lambda) = \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{-\lambda(X - \mathbb{E}[X])} \right] \right)$$

pour tout réel $\lambda > 0$.
(4) Vérifier que

$$\Psi(\lambda) \leq \frac{n\lambda^2}{2}$$

pour tout réel $\lambda > 0$.

(5) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}[X] - X \geq x\right) \leq e^{-\lambda x + \Psi(\lambda)} \ .$$

(6) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}[X] - X \geq x\right) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \ .$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser (sans la démontrer) l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire Y *positive, admettant une espérance :*

$$\mathbb{P}\Big(Y \geq t\Big) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t}$$

pour tout réel $t > 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demie-heure.

Exercice 1.

(1) Pour un réel $t > 0$ et un entier $n \geq 0$, montrer que la fonction

$$\varphi_{n,t} : y \in [0,t] \longmapsto y(t-y)^n$$

admet un maximum, que l'on précisera.

(2) On considère la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_2(x,y) = xy$. Montrer que f_2 admet un maximum à déterminer sur le segment $A_{2,t} = \{(x,y) : x+y = t,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, où $t > 0$ est un réel fixé. On note $M_{2,t}$ ce maximum.

(3) Pour tout $n \geq 2$, on introduit la fonction

$$f_n : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 x_2 \ldots x_n \ ;$$

montrer par récurrence que pour tout $t > 0$, la fonction f_n admet un maximum $M_{n,t}$ (à déterminer) sur l'ensemble

$$A_{n,t} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 + \ldots + x_n = t \text{ et pour tout } i,\ x_i \geq 0 \right\} .$$

Exercice 2.

Considérons le polynôme

$$P(X) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p} .$$

On pose pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,

$$x_k = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} .$$

(1) Montrer que les x_k sont deux à deux distincts.

(2) Indiquer le degré de P et son coefficient dominant.

(3) Montrer que

$$P\left(X^2\right) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

(où $i \in \mathbb{C}$ est tel que $i^2 = -1$).

(4) En déduire que $x_1, x_2, ..., x_n$ sont racines de P et factoriser P.