$\boxed{\text{Feuille 1}}$

Exercice 1

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,\, 1]$.

1. Donner leur fonction de répartition commune F.
2. Donner les fonctions de répartitions de $U = \min\{X,\, Y\}$ et de $V = \max\{X,\, Y\}$.
3. Calculer la probabilité que $\max\{X,\, Y\}$ dépasse $3/4$ sachant que $\min\{X,\, Y\}$ dépasse $1/3$.
4. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit λ un réel fixé. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la seule valeur propre est λ. Soit e_1 un vecteur propre associé.

1. Montrer que quelque soit le choix de e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$, f est représenté dans cette base par une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

   pour un certain réel c.
2. Montrer que l'on peut choisir e_2 de telle sorte que $c = 0$ ou 1.
3. Pour ce choix, calculer B^n pour tout entier naturel n.

Feuille 2

Exercice 1

On considère la fonction de la variable réelle définie par

$$\begin{cases} \text{si } x < -1 & f(x) = -\sqrt{x^2+2x+2}, \\ \text{si } -1 \leq x \leq 1 & f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \\ \text{si } 1 < x & f(x) = \sqrt{x^2-2x+2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Donner le tableau de variation de f et donner ses asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}.$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2

On coupe une baguette de bois d'un mètre de long en deux endroits choisis au hasard. On veut savoir la probabilité que l'on puisse construire un triangle avec les trois bouts de bois que l'on obtient.

1. Expliquer brièvement pourquoi le problème considéré peut être modélisé de la sorte : on tire indépendamment deux variables aléatoires X et Y uniformes sur $[0, 1]$, et on regarde s'il existe un triangle de côtés $\min\{X, Y\}$, $|X - Y|$, et $1 - \max\{X, Y\}$.
2. On rappelle qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle de côtés u, v, w existe est que $u + v > w$, $v + w > u$ et $w + u > v$. Montrer que cela équivaut au fait que le plus grand côté soit de longueur inférieure à la somme des deux autres. En particulier, prouver que dans le cas où $u + v + w = 1$, cela est également équivalent à ce que le plus grand des trois est plus petit que $1/2$.
3. Calculer finalement la probabilité désirée dans le problème de départ. *Indication : Il est conseillé de faire un dessin.*

Feuille 3

Exercice 1

Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\, 2\pi]$. On note $X = \cos(Z)$ et $Y = \sin(Z)$.

1. Calculer l'espérance de X et celle de Y.
2. En utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{ix}$ et sa définition en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$, rappeler pourquoi pour tout réel x, $\cos(x)\,\sin(x) = \sin(2x)/2$.
3. Montrer que la covariance de X et Y est nulle.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit m un réel quelconque. Soit la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, $f(u) = (X, Y, Z)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & (m-2)x + 2y - z \\ Y & = & 2x + my + 2z \\ Z & = & 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 3 sauf pour $m = 0, 1$ ou 2.
2. Pour chacune de ces 3 valeurs, donner alors le rang de f et caracteriser alors $Im\ f$ par une relation linéaire liant X, Y, Z.

Feuille 4

Exercice 1

Soit A et B deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation (en x)

$$x^2 + 2Ax + B$$

soient réelles ?

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients réels. Soient $x_0, ..., x_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts. On pose pour tout entier k de $\{0, ..., n\}$

$$P_k(X) = \frac{\prod_{i \neq k}(X - x_i)}{\prod_{i \neq k}(x_k - x_i)}$$

1. Montrer que les P_k appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et que $P_k(x_k) = 1$.
2. Soient $y_0, ..., y_n$ $n+1$ réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout k de $\{0, ..., n\}$, $P(x_k) = y_k$.
3. Pour tout j de $\{0, ..., n\}$, on définit

$$\begin{array}{rccc} T_j & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & P(x_j) \end{array}$$

   Montrer que T_j est une application linéaire. Calculer $T_j(P_k)$ pour tout j et tout k de $\{0, ..., n\}$. En déduire que les T_j sont libres puis que $\{T_0, ..., T_n\}$ forment une base de l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.
4. Soit T la fonction qui associe à un polynôme sa dérivée en x_0 i.e.

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & P'(x_0) \end{array}$$

   Montrer que T est une application linéaire et calculer ses coefficients sur la base $\{T_0, ..., T_n\}$

Feuille 5

Exercice 1

A l'entraînement, un basketteur met le ballon dans le panier avec une probabilité p.

1. Soit N le nombre minimal de lancers que le basketteur doit faire pour voir passer le ballon dans le panier. Par exemple, si le ballon est dans le panier au premier coup, $N = 1$. Donner la loi de N. Donner son espérance et sa variance.
2. Soit n un entier naturel. Maintenant le basketteur compte le nombre minimal de lancers nécessaires, X, pour mettre n paniers. Donner pour tout entier $k > 0$, $\mathbb{P}(X = k)$.
3. Expliquer pourquoi X peut être vu comme une somme de n variables indépendantes et identiquement distribuées dont on donnera la loi.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

On rappelle que $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \frac{2-p}{p^2}$.

Exercice 2

Soit $f : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ une fonction continue et strictement monotone telle que pour tout $x \in [0,\, 1]$,

$$2x - f(x) \in [0,\, 1] \ .$$

1. Que valent $f(0)$ et $f(1)$? En déduire le sens de variation de f.
2. On suppose dorénavant que f vérifie, pour tout $x \in [0,\, 1]$,

   $$f\,(2x - f(x)) = x \ .$$

   Montrer que si f est la fonction identité ($x \mapsto f(x) = x$), alors elle vérifie toutes les conditions de l'énoncé.
3. Réciproquement, on veut montrer que f est nécessairement l'identité.
   (a) Indiquer pourquoi f est bijective sur $[0; 1]$. On note f^{-1} la fonction réciproque.
   (b) Soit $x_0 \in [0,\, 1]$, on définit la suite des itérées : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

   $$x_n = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{2} \ .$$

   (c) En déduire que pour $n \geq 1$, $x_n = x_0 + n(x_1 - x_0)$.
   (d) En déduire que f est la fonction identité.

Feuille 6

Exercice 1

On dispose d'un alcotest fiable à 98%, c'est-à-dire que 98% des personnes ayant bu de l'alcool ont un test positif et que 98% des personnes n'ayant pas bu d'alcool ont un test négatif. On sait qu'à un moment donné, 2% des automobilistes ont bu de l'alcool.

1. Calculer la probabilité qu'un alcotest effectué sur un automobiliste pris au hasard soit positif
2. Donner la probabilité que l'automobiliste ait bu de l'alcool sachant que le test est positif.
3. Donner la probabilité que l'automobiliste n'ait rien bu sachant que le test est négatif.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tous strictement plus grands que -1. Lorsque la suite (p_n) des produits $p_n = (1+u_1)\cdots(1+u_n)$ converge, on note

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$$

sa limite. On dit alors que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge (vers p).

1. Déterminer p lorsque $u_n = -1 + 1/(n+1)$.
2. On suppose *dans cette question seulement* que tous les u_n sont positifs. Encadrer p_n en fonction de S_n, où $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, et en déduire que le produit $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ est une série convergente.
3. Montrer (dans le cas général) qu'une condition nécessaire de convergence de $\prod(1+u_n)$ vers $p > 0$ est que $u_n \to 0$.
4. Soit $p > 0$. Montrer que $\prod(1+u_n)$ converge vers p si et seulement si $\sum \log(1+u_n)$ converge. Quand tous les u_n sont positifs, montrer que $\sum \log(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
5. En général cependant, montrer que $\sum \log(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de natures différentes en traitant par exemple le cas $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

Feuille 7

Exercice 1

Soit f une fonction continue $[0,\,1] \to \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $f(\mathbb{R}) \subset [0,\,1]$. Montrer qu'alors f admet un point fixe dans $[0,\,1]$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,\,1]$ tel que $f(x_0) - x_0 = 0$.
2. On suppose ici que
$$2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
Montrer qu'alors f admet un point fixe en considérant la dérivée de
$$g : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2}\ .$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit E_n comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_n$ où pour tout t dans $\mathbb{R}$ et tout k de $\{0, ..., n\}$
$$\phi_k(t) = \cos(kt) \text{ et } \psi_k(t) = \sin(kt).$$

1. Montrer que E_n est aussi le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\theta_{-n}, ..., \theta_0, ..., \theta_n$ où pour tout t dans $\mathbb{R}$ et tout k de $\{-n, ..., n\}$ $\theta_k(t) = e^{ikt}$.
2. Montrer que si $f \in E_n$ alors $f'' + n^2 f$ appartient à E_{n-1}.
3. Montrer par récurrence sur n que les $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_n$ sont libres et donner la dimension de E_n.
4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, ..., n\}$. On définit la fonction caractéristique de X par la fonction qui à tout réel t associe
$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)).$$
($\mathbb{E}$ représente l'espérance par rapport à la variable X.)
Montrer que $\int_0^{2\pi} \Phi_X(t)e^{-itk}dt = 2\pi\mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier k de $\{0, ..., n\}$. En déduire que Φ_X caractérise la loi de X.
Remarque : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *alors* $\int f(t)dt = [\int Re(f(t))dt] + i[\int Im(f(t))dt]$.
5. Si X est une variable Binomiale $B(n,p)$, calculer Φ_X.

Feuille 8

Exercice 1

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres tous strictement positifs. On note pour tout entier n, $V_n = v_1+\ldots+v_n$. On veut montrer que les séries $\sum v_k$ et $\sum v_{k+1}/\sqrt{V_k}$ sont de même nature (convergente ou divergente).

1. Montrer que pour $k \geq 1$, $v_{k+1} = (\sqrt{V_{k+1}} - \sqrt{V_k})\,(\sqrt{V_{k+1}} + \sqrt{V_k})$.
2. En déduire l'équivalence annoncée.

Exercice 2

On observe $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, \theta]$. Le paramètre θ est un réel strictement positif, inconnu que l'on cherche à estimer.

1. Donner la moyenne et la variance de X_1.
2. Montrer que $\hat{\theta} = 2\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ est un estimateur sans biais de θ, c'est-à-dire $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$.
3. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(\sqrt{n}|\hat{\theta} - \theta| \leq t)$ a une limite non nulle quand n tend vers $+\infty$.($\mathbb{P}$ représente la probabilité sous la loi de $(X_1, ..., X_n)$.)
4. Calculer la fonction de répartition de $\tilde{\theta} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.
5. En déduire que pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \theta$
$$\mathbb{P}(|\tilde{\theta} - \theta| > \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n.$$
6. On rappelle que si X est une variable positive $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)dt$. Calculer $\mathbb{E}(\tilde{\theta})$ et en déduire un autre estimateur sans biais de θ.
7. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(n|\tilde{\theta} - \theta| \leq t)$ a une limite non nulle quand n tend vers $+\infty$.
Remarque culturelle : en ce sens, $\tilde{\theta}$ converge plus vite que $\hat{\theta}$ vers θ.

Feuille 9

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g$ est inversible. Montrer que rg $(f) +$ rg $(g) = n$.

Exercice 2

L'objet de cet exercice est d'étudier, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 t^{t^x} \, \mathrm{d}t \ .$$

1. Que vaut $F(0)$?
2. Rappeler, pour $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, l'écriture de t^a à l'aide des fonctions exp et ln.
3. On considère, pour x fixé, la fonction $\varphi_x : t \in]0, 1] \mapsto t^{t^x}$. Etudier φ_x : montrer qu'elle est définie et continue, dresser son tableau de variations, la prolonger par continuité en 0.
4. Montrer que F est définie et croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer la limite de F en $+\infty$ après avoir encadré F.

Feuille 10

Exercice 1

On suppose que N, le nombre d'oeufs pondus par une tortue, suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Donner l'espérance et la variance de N.
2. Chaque oeuf de la ponte a une probabilité p d'éclore et cela indépendamment de ce qui se passe pour les autres oeufs. Quelle est la loi du nombre d'oeufs éclos, N_e, par ponte ?
3. Il y a une proportion f de femelles et m de mâles parmi les oeufs pondus ($f + m = 1$). Le sexe de l'oeuf est complétement indépendant du fait que l'oeuf éclose. Quelle est la loi de N_f, le nombre de femelles écloses et celle de N_m, le nombre de mâles éclos ?
4. Montrer que N_f, le nombre de femelles écloses, et $N_{ne} = N - N_e$, le nombre d'oeufs non éclos, sont des variables indépendantes.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Un endomorphisme u sur E est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $u^p = u \circ \cdots \circ u = 0$. Soit un tel endomorphisme u.

1. Montrer que le rang de u est strictement inférieur à n.
2. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(F) \subset F$. Montrer que u restreint à un tel sous-espace F forme un endomorphisme de F, noté $u_{|F}$, et que le rang de $u_{|F}$ est strictement inférieur à la dimension de F dès que F n'est pas le sous-espace trivial $\{0\}$.
3. Soient maintenant u_1, u_2, ..., u_n n endormorphismes nilpotents de E, commutant deux à deux, c'est-à-dire, tels que pour tous i et j, $\quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$ en étudiant par récurrence le rang de $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$.

Feuille 11

Exercice 1

Soit A et B deux matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à montrer que

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

est inversible (dans $\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$) si et seulement si $A + iB$ est inversible dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que
$$\begin{pmatrix} I & iI \\ iI & I \end{pmatrix}$$
est inversible dans $\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

2. Ecrire
$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & iI \\ iI & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & iI \\ iI & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$
où C_1, C_2 sont des matrices à déterminer, et conclure.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose,

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\sin(t)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que $u_n = (-1)^{n-1}|u_n|$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$
$$\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \leq |u_n| \leq \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2}.$$
Indication : on pourra commencer par montrer que $g : t \mapsto t/(1+t^2)$ est décroissante sur un intervalle que l'on précisera.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{1+t^2} dt$ converge.

Feuille 12

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Montrer que si f et g tendent vers $+\infty$ ou vers $0+$ quand $x \to +\infty$ et qu'elles sont équivalentes en $+\infty$ alors $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont elles aussi équivalentes en $+\infty$.
2. En déduire la limite de $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 2

Sur l'île du Crozet, il passe au plus un bateau par mois. Tous les mois ont la même probabilité, p, qu'il passe un bateau et on suppose que la venue de chaque bateau est indépendante de ce qui s'est passé les autres mois. Arrivé par bateau sur l'île au mois 0, soit M le nombre de mois qu'il faudra attendre avant l'arrivée du prochain bateau.

1. Donner la loi de M.
2. Chaque bateau a une probabilité λ de contenir des cigarettes et cela indépendamment de tout le reste (arrivée du bateau, mois précédents). Soit M_c le nombre de mois qu'il faudra attendre avant le ravitaillement en cigarettes. Quelle est la loi de M_c ?
3. Donner la loi de N_c le nombre de cargaisons de cigarettes reçues entre le mois 1 et le mois m.
4. Il se peut aussi qu'il y ait de l'alcool dans la cargaison avec probabilité μ et cela de manière totalement indépendante du reste (entre autres la présence ou non de cigarettes). Soit M_a le nombre de mois qu'il faudra attendre avant le ravitaillement en alcool. Quelle est la probabilité pour que $M_c = M_a$?

Feuille 13

Exercice 1

Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt.$$

1. Calculer pour tout entier naturel p, $B(p, 0)$.
2. Montrer que $B(p, q) = B(q, p)$.
3. Exprimer $B(p, q)$ en fonction de $B(p + 1, q - 1)$.
4. Calculer $B(p, q)$ en fonction de p et q.

Exercice 2

Soit t un réel fixé. On considère les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} V_1(t) & = & (\ 1-t^2\ ,\ 1+t\ ,\ 1+t^3\ ), \\ V_2(t) & = & (\ 1-t\ ,\ 2\ ,\ 1-t\ ), \\ V_3(t) & = & (\ 1-t^3\ ,\ t\ ,\ 1\ ), \\ V_4(t) & = & (\ 1-t\ ,\ 1\ ,\ 1+t\ ). \end{array}$$

1. Déterminer la dimension de F, l'espace engendré par $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t)\}$ selon les valeurs de t.
2. Discuter selon t si $V_4(t)$ appartient à F ou non.

Feuille 14

Exercice 1

1. Soit λ un réel fixé. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\lambda-t)^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 1$.
2. En déduire que si X est une variable aléatoire réelle $\mathcal{N}(0,1)$ (loi normale (Gaussienne) centrée réduite), alors $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = e^{\lambda^2/2}$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. On pose $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $V = \frac{Y-X}{\sqrt{2}}$. Montrer $\mathbb{E}(e^{\lambda U}) = \mathbb{E}(e^{\lambda V}) = e^{\lambda^2/2}$.
4. Soit μ un autre réel. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda U+\mu V}) = \mathbb{E}(e^{\lambda U})\mathbb{E}(e^{\mu V})$.

Remarque "culturelle" : la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}(e^{\lambda X})$ caractérise la loi de X et la fonction $(\lambda,\mu) \mapsto \mathbb{E}(e^{\lambda U+\mu V})$ caractérise la loi du couple (U,V). On vient donc de montrer que U et V sont deux variables normales centrées réduites indépendantes.

Exercice 2

Soient A, B deux éléments de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. (On désigne par I désigne la matrice identité.)

1. Montrer que si $AB - BA = \alpha I$ pour un certain réel α, alors A et B commutent, i.e., $AB = BA$. *Indication : Penser à considérer la trace.*
2. Soit W dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer que si W est diagonalisable, alors la trace de W est non nulle.
   (b) Montrer que si la trace de W est non nulle alors W est diagonalisable. *Indication : on pourra commencer par montrer que W est semblable à une matrice dont seule la première ligne est non nulle.*
   (c) Montrer que si la trace de W est nulle alors $W^2 = 0$.
3. On suppose que $V = AB - BA$ est de rang 1. Montrer que pour tout entier k, $VA^kV = 0$. On commencera par montrer que $(VA^k)^2 = 0$.

Feuille 15

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1;1] \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1;0]$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sauf pour deux valeurs particulières de u_0 que l'on précisera.

Exercice 2

On dit qu'une matrice $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier p tel que $N^p = [0]$ (matrice nulle). On note I_r la matrice identité de $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$, pour $1 \leq r \leq n$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
2. On fixe désormais $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et p un entier tel que $N^p = [0]$.
   (a) Rappeler la formule donnant la valeur des sommes partielles $1 + x + \ldots + x^n$ d'une série géométrique (pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ entier).
   (b) S'en inspirer pour écrire, pour tout entier q, $\quad I_n - N^q$ comme $(I_n - N)\,M_q$, où M_q est une matrice à expliciter en fonction de N et q.
   (c) En déduire que $I_n - N$ est inversible, et préciser son inverse.
   (d) Montrer que la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   est inversible et calculer son inverse.

Feuille 16

Exercice 1

Soit X une variable exponentielle de paramètre λ. Soit N le plus petit entier tel que $N \geq X$. Donner la loi de N.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension 2, f un endomorphisme de E et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ n $(n \geq 2)$ vecteurs de E deux à deux distincts, engendrant E. On suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-2\}$, $f(a_i) = a_{i+1}$ et $f(a_{n-1}) = a_0$.

1. Rappeler ce que signifie que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ engendre E.
2. Calculer $f^m(a_j) = f \circ \cdots \circ f(a_j)$, pour m entier, $m \leq n$, et $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. En déduire que f^n est l'identité, mais qu'aucun des f^m, $1 \leq m < n$, ne l'est.
3. Déterminer le rang et le noyau de f.
4. Montrer que les valeurs propres de f sont 1 et/ou -1.
5. Montrer qu'aucun des a_j n'est vecteur propre de f. (Raisonner par l'absurde en supposant que l'un des a_j l'est et aboutir à une contradiction.)
6. En conclure que tous les (a_j, a_{j+1}) forment des bases de E, et montrer que l'écriture de f dans une telle base est de la forme
$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_j \\ 1 & \beta_j \end{bmatrix}$$
(on ne cherchera pas à déterminer les valeurs précises des α_j et β_j).
7. Montrer que les β_j sont tous égaux.

Feuille 17

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $Ker(v) \subset Ker(u)$. On pose $dim(Ker(v)) = k$ et $dim(Ker(u)) = h$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E tels que les k premiers vecteurs soient une base de $Ker(v)$ et les h premiers vecteurs une base de $Ker(u)$.
2. Prouver que les $v(e_i)$ pour $i > k$ forment une base de $Im(v)$.
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme w tel que $u = w \circ v$.

Exercice 2

Une urne contient des boules numérotées de 1 à N (où N est un entier plus grand que 2). Elles sont indistinguables au toucher et l'on effectue n tirages avec remise ; on note par Z_j le numéro tiré à la j-ème étape. On suppose N inconnu à l'expérimentateur et on cherche à l'estimer.

1. On considère la moyenne empirique $M_n = (Z_1 + \ldots + Z_n)/n$. Calculer l'espérance de M_n et en déduire un estimateur sans biais de N.
2. On considère maintenant $X_n = \max\{Z_1, \ldots, Z_n\}$, et on cherche à montrer qu'il est asymptotiquement sans biais, *id est*, que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = N .$$

A cet effet :

(a) Donner la fonction de répartition de X_n.

(b) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}[Y \geq k] = \mathbb{E}[Y].$$

(c) En déduire que $\mathbb{E}[X_n] \geq N - N/(n+1)$, et conclure.

Feuille 18

Exercice 1

1. Montrer que $\int_0^1 \ln(x)dx$ existe et calculer sa valeur.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln(p/n) = -1$. *Indication : on pourra essayer d'encadrer la somme par une intégrale*
3. Montrer que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ converge quand $n \to +\infty$ et donner sa limite.

Exercice 2

Soit un entier $n \geq 2$. Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_1, \ldots, b_{n-1}$ des nombres réels. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, alors A est diagonalisable si et seulement si A est la matrice nulle. Faire de même pour le cas $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.
2. On se restreint dans cette question seulement au cas où les a_i sont non tous nuls, et les b_j également. En supposant A diagonalisable, indiquer les valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.
   Indication : On commencera par exprimer la trace de A^2 en fonction de $\gamma = \sum_{j\leq n-1} a_j\, b_j$.
3. Réciproquement, montrer que $\gamma > 0$ entraîne que A est diagonalisable et formuler proprement et exhaustivement la condition nécessaire et suffisante recherchée.

Feuille 19

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ; pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = \mathbb{P}[X = n]$.

1. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si pour tout $n \geq 0, \quad p_{n+1}/p_n = \lambda/(n+1)$.
2. Quelle est la valeur la plus probable d'une variable distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$?

Exercice 2

Soit la fonction G :

$$x \mapsto \int_{1/x}^{x} \frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} dt.$$

1. Montrer que $G(2)$ existe.
2. Donner l'ensemble de définition de G.
3. Montrer que G est continue sur son ensemble de définition.
   Indication : On pourra par exemple écrire pour $x > 1$,

$$G(x) = \int_{1/x}^{1/2} \frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} dt + G(2) + \int_{2}^{x} \frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} dt.$$

4. Montrer que G est dérivable sauf peut-être en un point de son ensemble de définition et donner sa dérivée.
5. G est-elle croissante ou décroissante ? Donner les limites si elles existent en $-\infty, 0^-, 0^+, +\infty$.
6. Faire l'étude asymptotique de G.