HEC B/L - 2013

Exercice 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

- Les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- On note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On considère m voitures $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ qui participent à une course automobile. Cette course se déroule sur un circuit fermé et consiste en un nombre fini de tours supérieur ou égal à 2.

1. On suppose dans cette question que lors d'un tour d'essai, le temps mis par chacune des voitures $\mathcal{V}_k$ ($k \in [\![1, m]\!]$) pour boucler ce tour est une variable aléatoire T_k.
   On suppose de plus que les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_m$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose pour tout entier $m \geqslant 2$: $Z_m = \min(T_1, \ldots, T_m)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_{Z_m} de Z_m.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de densités respectives f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}^+$, et de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y.
   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_Y(t) f_X(t) dt$ est convergente.
   On admet alors l'égalité suivante : $\mathbb{P}([Y < X]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_Y(t) f_X(t) dt$.
   (c) En déduire la probabilité que la voiture $\mathcal{V}_1$ réalise le meilleur temps (le plus court) à l'issue de ce tour d'essai. Commenter le résultat.
2. Dans cette question, on s'intéresse uniquement au comportement de la voiture $\mathcal{V}_1$ pendant la course.
   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire définie par :
   $$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si la voiture } \mathcal{V}_1 \text{ arrive en tête à l'issue du } n\text{-ième tour,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
   On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
   On suppose que $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$ et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+1}{n+1}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 0])$ et $\mathbb{P}([S_n = n])$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{\mathbb{E}[S_n]}{n+1}$
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, les variables aléatoires $X_2, X_3, \ldots, X_n$ suivent la même loi.

   (d) Quelle est la probabilité que la voiture $\mathcal{V}_1$ gagne la course ?
   (e) Établir pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'égalité suivante : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{1-p}{n}$.
3. Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout x réel, la relation :

$$f'(x) = e^{-xf(x)}. \qquad (1)$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour tout x réel, on pose : $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = (g(x))^2$.
   (a) On note g' la fonction dérivée de g. Montrer que pour tout x réel, $g'(x)$ est du même signe que $-xg(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction h.
   (c) En déduire que f est une fonction impaire.
2. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xf(x)}dx$ est convergente.
   (b) À l'aide de la relation (1), en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$.
   On pose alors : $\lambda = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Établir pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité suivante : $\displaystyle\int_0^x e^{-tf(t)}dt \geqslant \int_0^x e^{-\lambda t}dt$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $f(x) \geqslant \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$.
   (c) Montrer que $\lambda \geqslant 1$.
4. (a) Soit a un réel strictement positif. Établir pour tout réel $x \in [a, +\infty[$, l'inégalité suivante :
   $$f(x) - f(a) \leqslant \int_a^x e^{-tf(a)}dt.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a : $f(x) \leqslant f(a) + \dfrac{e^{-af(a)}}{f(a)}$.
   (c) On suppose que $\lambda > 1$. Établir l'existence d'un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 1$.
   (d) En déduire que l'on a : $\lambda \leqslant 2$.
5. Soit b un réel strictement positif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et monotone.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Établir l'encadrement suivant : $\dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x_n}\right) \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.
   (e) Montrer que x_{n+1} est équivalent à x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, nulles sur $]-\infty, 0]$.

On considère l'application Φ_n qui associe à toute fonction F de $\mathcal{E}$, la fonction $\Phi_n(F) = G_n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \int_0^1 nt^{n-1} F(xt)dt.$$

1. Donner pour tout réel $x \leqslant 0$, la valeur de $G_n(x)$.
2. Montrer que Φ_n est une application linéaire.
3. (a) Montrer que Φ_n est une application croissante, c'est-à-dire que si F_1 et F_2 sont deux fonctions de $\mathcal{E}$ telles que $F_1 \geqslant F_2$, alors on a : $\Phi_n(F_1) \geqslant \Phi_n(F_2)$.
   (b) Montrer que si F est croissante, alors G_n est croissante.
4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les fonctions h_k et g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = \begin{cases} x^k & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad h_k(x) = \begin{cases} x^k \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

   Soit les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k \qquad \text{et} \qquad H_n = Vect(g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

   (a) Montrer que S_n appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) On suppose que $\beta_n \neq 0$. Donner un équivalent de $S_n(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$.
   (c) On suppose que $\beta_n = 0$ et que $\alpha_n \neq 0$. Donner un équivalent de $S_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) À l'aide d'une démonstration par récurrence, déduire de ce qui précède que $\mathcal{B} = (g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, ..$ est une base de H_n.
5. On note Ψ_n la restriction de Φ_n à H_n.
   (a) Calculer $\Psi_n(g_k)$ et $\Psi_n(h_k)$.
   (b) En déduire que Ψ_n est un endomorphisme de H_n.
   (c) Donner la matrice de Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que les valeurs propres de Ψ_n.
   (d) L'endomorphisme Ψ_n est-il bijectif ?
6. Établir pour tout réel $x > 0$, l'égalité : $G_n(x) = \dfrac{n}{x^n} \displaystyle\int_0^x u^{n-1} F(u)du$.
7. (a) Soit ε un réel strictement positif. En utilisant la continuité de F en 0, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $|x| \leqslant \alpha$, alors $|G_n(x)| \leqslant \varepsilon$.
   (b) En déduire que Φ_n est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
   (c) Montrer que l'endomorphisme Φ_n est injectif.
8. (a) Montrer que G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. On note G'_n la fonction dérivée de G_n. Exprimer pour tout $x > 0$, $G'_n(x)$ en fonction de $F(x)$ et $G_n(x)$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme Φ_n n'est pas surjectif.

9. On suppose l'existence de la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pose : $\ell = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

   (a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} G_n(x) = \ell$.

   (b) On suppose que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, de densité f nulle sur $\mathbb{R}^-$ et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Montrer que $G_n = \Phi_n(F)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.